Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Выпуск 5

Под редакцией чл.-корр. АН СССР

Л.А. Люстерника

Издательство Московского Университета
1973

СОДЕРЖАНИЕ

Сб. „Математические вопросы управления производством", вып. 5, М., МГУ, 1973

КАРЗАНОВ А.В.

О НАХОЖДЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

I. В статье будут рассматриваться некоторые классы целочисленных потоковых сетей. Один класс образуют т.н. простые сети. Частными случаями таких сетей являются сети, используемые для решения задач "о представителях множеств" Ф.Холла, сети, строящиеся для задач нахождения минимальных рассекающих множеств (иначе говоря, множеств вершин, разделяющих 2 вершины графа) и сети задач о различных общих представителях [1].

Другой класс образуют единичные сети (т.е. сети с пропускными способностями дуг, равными I). В нем будет рассмотрен подкласс сетей типа справочных (определение дано ниже).

В статье рассматривается применение к этим классам сетей алгоритма нахождения максимального потока методом справочных кратчайших путей (Е.А.Диниц [2]) и даны оценки числа действий алгоритма: $Cp\sqrt{n}$ для простых сетей, $Cpn^{2/3}$ для единичных сетей в общем случае и более точные оценки в случае сетей типа справочных (в зависимости от "длины" этих сетей). Здесь n - множество вершин, p - множество ребер, C - независимая от n, p константа.

В виде приложения в статье дан алгоритм приведения матрицы системы линейных уравнений к блочно-треугольному виду независимыми перестановками строк и столбцов. Как известно, блочно-треугольный вид матрицы позволяет понизить трудоемкость решения систем большого размера, как правило, встречающихся в задачах планирования и др. [3]. Будет показано, что эта задача сводится к решению некоторой задачи "о представителях множеств" и задачи выделения бикомпонент графа (оценка первой задачи - $Cp\sqrt{n}$, второй - Cp , где p - число ненулевых элементов в матрице). Особенно эффективно применение алгоритма в случае часто встречающихся слабозаполненных матриц, т.е. когда $p = o(n^2)$. Такие матрицы с большой вероятностью приводятся к блочно-треугольному виду.

2. Пусть в (не) ориентированном графе $G=[X;U]$ выделены 2 вершины s и t. Следуя терминологии, принятой в [1], назовем подмножество вершин $Z\subset X$ <u>s,t - рассекающим множеством</u>, если в подграфе, полученном из G удалением Z вершину s нельзя соединить с t (не) ориентированным путем (заметим, что если s не соединима с t уже в графе G, s,t - рассекающим множеством является, в частности, $\varnothing$). Множество Z называется <u>рассекающим множеством</u>, если оно для некоторых вершин x,y является x,y- рассекающим множеством.

Неориентированный граф можно заменой каждого ребра xy на 2 дуги $\vec{xy}$ и $\vec{yx}$ сделать ориентировочным. При этом рассекающие множества не изменяются. В дальнейшем мы будем иметь дело только с ориентированными графами.

В [1] показано, что задачу нахождения <u>минимального</u> (по числу вершин) s,t - рассекающего множества можно свести к задаче нахождения максимального потока в некоторой потоковой сети[1/]. $\tilde{G}_{s,t}$.

Множеством вершин X являются: а) s'' б) t' в) x', x'', если $x\in X$, $x\neq s,t$.

Зададим множество дуг $\tilde{U}$: а) дуги вида $\overrightarrow{x'x''}$ б) дуги вида $\overrightarrow{x''y'}$, если $\vec{xy}\in U$. Дуги вида $\overrightarrow{x'x''}$ будем называть <u>дуги-вершины</u>.

Положим пропускные способности c равными I на дугах-вершинах и ∞ на остальных.

На рис.I изображен пример построения потоковой сети для некоторого графа.

1/ Граф $G_{s,t}=[X;U]$ называется потоковой сетью, если в нем выделены 2 вершины: s -"источник" и t -"сток" и задана положительная функция c на U ("пропускная способность" дуг). Потоком в $G_{s,t}$ называется функция $f(u)$, $u\in U$ удовлетворяющая: I) $0\le f(u)\le c(u)$, $\forall u\in U$, 2) $\forall x\in X$, $x\neq s,t$, $\sum_{\vec{xy}\in U} f(\vec{xy})-\sum_{\vec{zx}\in U} f(\vec{zy})=0$. $\sum_{\vec{sy}\in U} f(\vec{sy})-\sum_{\vec{zs}\in U} f(\vec{zs})$ называется величиной потока f. Максимальный поток - поток максимальной возможной величины.

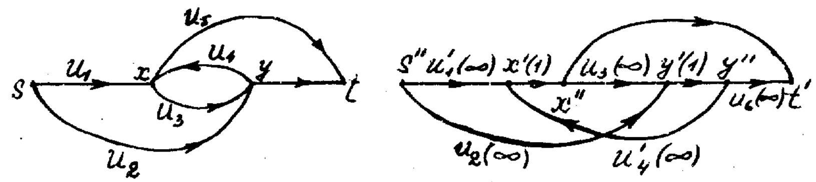

Рис.I

Назовем сеть $\Gamma_{s,t}=[Y;V]$ с целочисленными пропускными способностями <u>простой</u>, если $\forall y\in Y$, $y\neq s,t$ либо а) из y исходит не более одной дуги (обозначим ее $\vec{yz}$) и $c(\vec{yz})=1$; б) в y входит не более одной дуги $(\vec{xy})$ и $c(\vec{xy})=1$. Дуги $\vec{yz}$ в случае (а) и $\vec{xy}$ в случае (б) назовем <u>критическими дугами</u>.

Легко видеть, что потоковая сеть $G_{s,t}$ является простой, и критическими дугами являются дуги-вершины.

Задача "О представителях множеств" помимо классической формулировки может быть приведена в следующих 3-х видах (см. [1], [4]):

А) В матрице M размером $n\times n$, составленной из элементов 0 и I выбрать максимальное число единичных элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было не более одного выбранного элемента (матричная форма).

В) Задан двудольный (ориентированный) граф $G=[V';V'';U]$, $|V'|=|V''|=n$. Найти максимальное паросочетание (задача в форме графа).

С) Задана потоковая сеть $Q_{s,t}=[Z;W]$. $Z-(s\cup t)$ состоит из 2-х непересекающихся подмножеств: Z_1 и Z_2, s соединен исходящими дугами со всем Z_1, все Z_2 — с t. Подграф с вершинами $Z_1\cup Z_2$ изоморфен двудольному графу, определенному в форме В. Все дуги единичной пропускной способности. Найти максимальный поток в $G_{s,t}$ (задача в форме сети).

Назовем задачу "о представителях множеств" <u>полностью решенной</u>, если число найденных элементов (соответственно, величина паросочетания и максимальный поток) равно n. В противном случае будем говорить, что задача решена <u>не полностью</u>.

Сеть $Q_{s,t}$ задачи "о представителях" является простой, т.к. вершины в Z_1 имеют по одной входящей, а вершины в - по одной исходящей дуге.

3. Опишем кратко алгоритм Е.А.Диница нахождения максимального потока в произвольной сети $G_{s,t}=[X;U]$ методом справочных кратчайших путей (СКП).

Пусть уже найден поток P. Построим сеть $G_{s,t}(P)$ с теми же вершинами. Если в $G_{s,t}$ по дуге $\vec{xy}$ течет поток величины q, $0\le q\le c(\vec{xy})$, то в $G_{s,t}(P)$ сделаем пропускную способность дуги $\vec{xy}$ равной $c(\vec{xy})-q$ (операция I). Как обычно, пропускная способность, равная 0, будет означать отсутствие дуги. Если $q>0$, то присоединим также дугу $\vec{yx}$ с $c(\vec{yx})=q$ (операция II. При этом граф может превратиться в мультиграф). Будем называть ее "обратной" дугой к "настоящей" дуге $\vec{xy}$. В сети $G_{s,t}(P)$ выделяется суграф[1] S, состоящий из тех и только тех дуг, которые лежат на кратчайших путях из s в t (S называется справочной кратчайших путей. В S ищется некоторый поток ΔP "вычитание" которого из S делает s и t несвязными (назовем этот поток разрывающим) На нахождение этого потока в общем случае требуется Cpn действий, где $p=|U|$. Далее поток ΔP "алгебраически" прибавляется к P (т.е. к потоку q в "настоящей" дуге прибавляется новый поток Δq в настоящей вычитается поток $\Delta q'$ из обратной дуги), после чего "обратные дуги стираются и все начинается сначала. Доказывается, что справочных может быть не более n, откуда общая оценка числа действий – Cpn^2.

Покажем, что разрывающий поток в справочной S в простой сети $\Gamma_{s,t}$ можно найти за Cp действий. В работе со справочной в [2] находится некоторый путь из s в t ($O(k)$ действий, где k – расстояние от s до t), затем назначается максимальный поток вдоль этого пути и производится операция I со стиранием заполнившихся дуг. Также стираются дуги, не лежащие теперь на путях длины k из s в t ($O(\ell)$ действий на стирание, где ℓ – число этих дуг), и ищется новый путь из s в t. Если а) u – критическая дуга, принадлежащая пути,

1/ $G'=[X';U']$ называется суграфом графа $G=[X;U]$, если $X'=X$ и $U'\subset U$ [5].

то она заполнится, т.к. имеет минимальную пропускную способность, равную I, б) если $u=\vec{xy}$, $x\ne s$ – некритическая дуга, принадлежащая пути, то, по определению простой сети, критическая дуга, входящая в x, должна лежать на том же пути и после ее стирания вершина x (а, следовательно, и xy) станет недостижимой из s. Следовательно, число действий с произвольной дугой в работе со справочной S — $O(1)$, откуда оценка Cp.

<u>Лемма I</u>. Пусть P – некоторый целочисленный поток в простой сети $\Gamma_{s,t}$. Тогда его цепное разложение[1] дает множество путей из s в t попарно не имеющих общих вершин.

<u>Доказательство</u> очевидно следует из определения простой сети.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\Gamma_{s,t}$ – простая сеть и P – целочисленный поток в ней. Тогда сеть $\Gamma_{s,t}(P)$ – тоже простая.

<u>Доказательство</u>. Для $\forall x\in Y$, $x\ne s,t$ возможны следующие случаи:

1) P не проходит через x (т.е. равен 0 на дугах, инцидентных x). Тогда в $\Gamma_{s,t}(P)$ x и инцидентные ей дуги останутся без изменения.

2) Для x выполняется условие (а) простых сетей и P проходит через x. Тогда P содержит критическую дугу $\vec{xy}$ а, следовательно, и некоторую дугу $\vec{zx}$ (в силу целочисленности P $\vec{zx}$ единственная из входящих дуг с таким свойством и по ней течет поток, равный I)

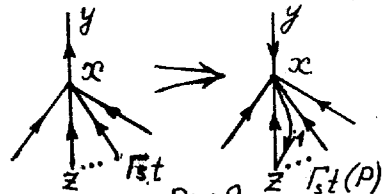

Рис 2.

1/ Поток P_1 называется цепным, если дуги, в которых $P_1\ne 0$, образуют путь из s в t, и величина P_1 равна минимуму пропускных способностей этих дуг.
Цепным разложением потока называется представление его в виде суммы цепных потоков (оно, вообще говоря, неоднозначно) [1].

В $\Gamma_{s,t}(P)$ появится новая дуга $\overrightarrow{yx}$, $c(\overrightarrow{yx})=1$ и дуга $\overrightarrow{xz}$, $c(\overrightarrow{xz})=1$. Следовательно, для x в $\Gamma_{s,t}(P)$ будет выполнено условие (а) простых сетей.

3) P проходит через x и для x в $\Gamma_{s,t}$ выполняется условие (б) простых сетей. Аналогично доказывается, что свойство (б) будет выполняться и в $\Gamma_{s,t}(P)$.

Лемма доказана.

<u>Теорема I</u>. Число справочных для простой сети $\Gamma_{s,t}$ в алгоритме СКП не превосходит $2\sqrt{n}$.

<u>Доказательство</u>

Пусть для $\Gamma_{s,t}$ уже построено k справочных $S_1,\dots,S_k$ и найден поток M_k. Обозначим величину максимального потока в $\Gamma_{s,t}$ через m. Тогда максимальный поток $\bar{M}_k$ в сети $\Gamma_{s,t}(M_k)$ равен $m-|M_k|$. Найдем связь между длиной следующей справочной $\ell(S_{k+1})$ и величиной потока M_k (длиной справочной $\ell(S_i)$ называется расстояние от s до t в $\Gamma_{s,t}(M_{i-1})$, а следовательно, и в S_i).

Назовем слоем O^{τ}_{k+1} множество вершин в $\Gamma_{s,t}(M_k)$, находящихся на расстоянии τ от s (t будет находиться в $O^{\ell(S_{k+1})}_{k+1}$).

<u>Лемма 3</u> $|\bar{M}_k|$ не превосходит числа вершины в слое O^{τ}_{k+1}, где $1\leq\tau<\ell(S_{k+1})$.

<u>Доказательство</u>. По лемме 2 сеть $\Gamma_{s,t}(M_k)$ является простой. Следовательно, по лемме I, цепное разложение $\bar{M}_k$ в $\Gamma_{s,t}(M_k)$ попарно не имеет общих вершин. Т.к. любой путь из s в t обязательно пересечет слой O^{τ}_{k+1}, $1\leq\tau<\ell(S_{k+1})$ в одной или нескольких вершинах, $|O^{\tau}_{k+1}|\geq|\bar{M}_k|$, что и требовалось.

Из неравенств $|O^{\tau}_{k+1}|\geq|\bar{M}_k|$, $1\leq\tau<\ell(S_{k+1})$ и $\sum\limits_{\tau=1}^{\ell(S_{k+1})-1}|O^{\tau}_{k+1}|<n$ вытекает

$$[\ell(S_{k+1})-1]\cdot|\bar{M}_k|<n \qquad \text{(I)}$$

Пользуясь этим соотношением, легко доказать утверждение теоремы. Действительно, $\ell(S_i)$ – монотонно возрастающая последовательность, поэтому число всех справочных длины $\leq\sqrt{n}$ не превосходит $\sqrt{n}$. Для всех остальных справочных из соотношения (I) получаем $|\bar{M}_i|<\sqrt{n}$. Очевидно, $|\bar{M}_i|$ монотонно

убывающая последовательность, поэтому число этих справочных $<[\sqrt{n}]$. Следовательно, число всех справочных не превосходит $2\sqrt{n}$, что и требуется в теореме.

Тем самым, нахождение максимального потока в простой сети осуществимо за $Cp\sqrt{n}$ действий. Заметим, что если $m<2\sqrt{n}$, то оценку сверху можно написать более точно – $Cp\min\{2\sqrt{n},m\}$

Для нахождения минимального рассекающего множества в G достаточно $Cp\sqrt{n}\bar{p}$ действий, где $\bar{p}$ – число дуг дополнительная графа G (это, очевидно, можно сделать, находя минимальное x,y – рассекающее множество для каждой пары вершин x,y графа G соединенных дугой в $\bar{G}$, т.к. если x и y не соединены дугой в $\bar{G}$, т.е. соединены в G, x,y – рассекающего множества не существует). В общем случае при $p=O(n^2)$, $\bar{p}=O(n^2)$ получается оценка $Cn^{4,5}$

<u>Примечание</u>. В [6] автором была доказана для алгоритма СКП в случае задачи "о представителях" верхняя оценка $Cp\sqrt{n}$ без использования понятия простой сети. Там же доказывается, что оценка снизу для алгоритма СКП в этом случае также равна $Cp\sqrt{n}$. Следовательно, наша оценка для простых сетей точна.

4. Пусть $G_{s,t}$ –сеть, все дуги которой имеют пропускные способности, равные I (<u>единичная сеть</u>).

Пусть расстояние от s до t равно $\ell>2$. Введем также для удобства величину $\ell'=\ell-2$.

Обозначим через O^i множество вершин, находящихся на расстоянии i от s, и $s_i=|O^i|$, $i=1,\dots,\ell'+1$

Пусть $s'_i=\frac{s_i+s_{i+1}}{2}$ и $s'=\min\{s'_i\}$, $i=1,\dots,\ell'$.

Для величины m максимального потока в $G_{s,t}$

$$m<\frac{n}{2} \qquad (2)$$

т.к. $m\leq s_1$, $m\leq s_{\ell'+1}$;

$$m\leq s'^2 \qquad (3)$$

т.к. $m<s_i\cdot s_{i+1}\leq s_i'^2$, $i=1,\dots,\ell'$.

Кроме того, $\sum_{i=1}^{\ell'} s_i' = \frac{s_1}{2} + s_2 + \ldots + \frac{s_{\ell+1}}{2} < n$, *откуда*

$$\ell' \cdot n' < n. \qquad (4)$$

Объединяя (3) и (4), получим:

$$m < \frac{n^2}{\ell'^2}. \qquad (5)$$

Пусть при нахождении максимального потока в $G_{s,t}$ уже было построено $[n^{2/3}]$ справочных. Тогда $\ell(S_{[n^{2/3}]+1}) > n^{2/3}$ и применяя для $G(M_{[n^{2/3}]})$ неравенство (5), получим $|\bar{M}_{[n^{2/3}]}| < \frac{n^2}{n^{2\cdot 2/3}} = n^{2/3}$, следовательно, число оставшихся справочных не превышает $n^{2/3}$. Отсюда общее число справочных $< 2n^{2/3}$, и оценка для единичных сетей $- C p n^{2/3}$

Назовем единичную $G_{s,t}$ сетью типа справочных (ТС), если любой простой путь из s в t имеет одну и ту же длину ℓ. Такую сеть без потери общности можно считать ациклической и имеющей только один тупик t и антитупик s.

Лемма 3. Любая цепь[1] в $G_{s,t}$ из s в t длины τ содержит $\frac{\tau-\ell}{2}$ обратных дуг.

Доказательство. Рассмотрим произвольную цепь с началом в s. Легко доказать индукцией по длине цепи, что, если она кончается в O^i, то в ней прямых дуг на i больше, чем обратных. При $i = \ell$ получаем требуемое утверждение.

Цепное разложение потока M_k в $G_{s,t}(M_k)$ является множеством путей длины $\geq \ell(S_{k+1})$. В каждом таком пути ξ "обратные" (в смысле п.3) дуги соответствуют обратным дугам соответствующей цепи в $G_{s,t}$. Поэтому в ξ по лемме 3 содержится не менее $\frac{\ell(S_{k+1})-\ell}{2}$ "обратных" дуг. Поскольку число таких путей равно $|M_k|$, а общее число "обратных" дуг в $G_{s,t}(M_k)$ равно $|M_k| \cdot \ell$ получаем

$$\frac{\ell(S_{k+1})-\ell}{2} \cdot |\bar{M}_k| < \ell |M_k| \quad \text{или}$$

$$[\ell(S_{k+1}) - \ell] \cdot |\bar{M}_k| < 2\ell m \qquad (6)$$

1/ Цепью называется последовательность $x_0 u_0 x_1 u_1 \ldots u_{q-1} x_q$, где каждые 2 соседние дуги и вершина инцидентны. q – длина цепи. Если $u_i = \overrightarrow{x_i x_{i+1}}$, то дуга называется прямой дугой цепи, если $u_i = \overrightarrow{x_{i+1} x_i}$ – обратной.

Пусть A – множество справочных S_i для которых $\ell(S_i) - \ell \leq \sqrt{2\ell m}$. Поскольку $\ell(S_i) = \ell$, получаем $|A| \leq \sqrt{2\ell m}$.

Для множества B остальных справочных справедливо $|\bar{M}_i| < \sqrt{2\ell m}$, отсюда $|B| < \sqrt{2\ell m}$, следовательно,

$$|A + B| < 2\sqrt{2\ell m}.$$

Из (2) и (5) получаем: $|A+B| < C_1\sqrt{\ell m}$, $|A+B| < C\frac{n}{\sqrt{\ell}}$

Кроме того, $|A+B| \leq m < n^2/\ell'^2$

Окончательно:

$$|A+B| < C \min\{\sqrt{\ell m}, n/\sqrt{\ell}, n^2/\ell^2, n^{2/3}\} \qquad (7)$$

Исследуем (7) в экстремальных случаях.

1) Если $\ell = C(1)$, то $|A+B| < C\sqrt{n}$, и число действий СКП оценивается $Cp\sqrt{n}$.

2) Если $\ell = C(n)$, то $|A+B| = C(1)$ и оценка СКП $- Cp$

5. Матрица A размером $n \times n$ называется блочно-треугольной, если существует набор натуральных чисел $k_1, \ldots, k_\tau$, $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_\tau = n$, $\tau \geq 2$ так, что $\forall (i,j) / i \leq k_\ell, j > k_\ell /$ справедливо $a_{i,j} = 0$ (рис.3). Число τ называется длиной набора (очевидно, для данной блочно-треугольной матрицы имеет смысл рассматривать набор наибольшей длины, который единственен).

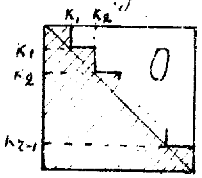

Рис.3

Матрица A называется приводимой (к блочно-треугольному виду), если в результате некоторой перестановки строк и независимо – перестановки столбцов, матрица становится блочно-треугольной.

Вместо матрицы A можно рассматривать матрицу $M = (m_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, где $m_{ij} = 1$, если $a_{ij} \neq 0$ и $m_{ij} = 0$, если $a_{ij} = 0$ (M называется терм-матрицей матрицы A).

Обозначим множество строк матрицы M через Φ множество столбцов X.

Для $\forall \Phi' \subseteq \Phi$ через $D(\Phi')$ обозначим множество столбцов, каждый из которых имеет ненулевой элемент в какой-либо из строк Φ'. Если $\exists \Phi' \subset \Phi$, $|\Phi'| > |D(\Phi')|$, то матрица

M (а также A) является вырожденной. В дальнейшем будем рассматривать только невырожденные матрицы.

Подмножество $C \subset \Phi$ назовем **квазиблоком**, если $|C| = |\mathcal{D}(C)|$ Пополним множество квазиблоков несобственными квазиблоками $\varnothing$ и Φ. Тогда справедлива.

Лемма 4. Если C_1 и C_2 квазиблоки, то $C' = C_1 \cup C_2$ и $C'' = C_1 \cap C_2$ тоже квазиблоки[I/], т.е. множество квазиблоков задает структуру.

Доказательство. Легко видеть, что $\mathcal{D}(C') \subseteq \mathcal{D}(C_1) \cap \mathcal{D}(C_2)$ Если $|C'| < |\mathcal{D}(C_1) \cap \mathcal{D}(C_2)|$, то $|C''| = |C_1| + |C_2| - |C'| >$ $> |\mathcal{D}(C_1)| + |\mathcal{D}(C_2)| - |\mathcal{D}(C_1) \cap \mathcal{D}(C_2)| = |\mathcal{D}(C_1 \cup C_2)| = |\mathcal{D}(C'')|$, т.е. матрица M – вырожденная.

Если же $|C'| > |\mathcal{D}(C')|$, то M также вырождена. Следовательно, $|C'| = |\mathcal{D}(C')| = |\mathcal{D}(C_1) \cap \mathcal{D}(C_2)|$ и $|C''| = |\mathcal{D}(C'')|$, что и требовалось.

Подмножество $B \subset \Phi$ назовем блоком, если для любого квазиблока, B целиком входит или целиком не входит в него и B максимально по включению.

На множестве блоков можно ввести операцию сравнения. Скажем, что $B_1 \prec B_2$, если $\forall C \,/\, B_2 \subset C \Rightarrow B_1 \subset C$. Легко доказать, что $\prec$ задает частичное упорядочение на множестве блоков.

Столбец $X \in \mathcal{D}(B)$ назовем собственным для B, если $\forall B' \prec B,\ X \notin \mathcal{D}(B')$. Множество собственных столбцов для B обозначим $S(B)$

Теорема 2. I) $\forall B,\ |B| = |S(B)|$ 2) если $\tilde{B} / \mathcal{D}(\tilde{B}) \cap S(B) \neq \varnothing$, то $B \prec \tilde{B}$.

Доказательство. Для $\forall B$ через $C(B)$ обозначим минимальный квазиблок, содержащий B. $B' \subset C(B),\ B' \neq B \Leftrightarrow B' \prec B$ Очевидно, для $\forall B' \prec B$, если $B'' \subset C(B')$, то $B'' \prec B$ Пусть $\bar{C}(B) = \bigcup C(B')$. $\bar{C}(B)$ – квазиблок, состоящий из блоков, меньших B. Следовательно, $B = C(B) \setminus \bar{C}(B)$.

I/ Эту лемму можно получить также как следствие теоремы о пересечении и объединении критических множеств (см. [4])

Тогда, очевидно, $S(B) = \mathcal{D}(C(B)) \setminus \mathcal{D}(\bar{C}(B))$ и $|S(B)| = |\mathcal{D}(C(B))| - |\mathcal{D}(\bar{C}(B))| = |C(B)| - |\bar{C}(B)| = |B|$.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть $B \not\prec \tilde{B}$, тогда $B \not\subset C(\tilde{B})$. Обозначим $C' = C(\tilde{B}) \cup \bar{C}(B)$. Очевидно, $\mathcal{D}(C' \cup C(B)) \setminus \mathcal{D}(C') \subseteq S(B)$. Т.к. $\mathcal{D}(\tilde{B}) \cap S(B) \neq \varnothing$ то вложение строгое. Но это противоречит тому, что $|S(B)| = |B| = |C' \cup C(B)| - |C'| = |\mathcal{D}(C' \cup C(B))| - |\mathcal{D}(C')|$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть ξ – некоторое упорядочение частично упорядоченного множества $\{B\}$. Тогда можно так переставить строки и столбцы M (или A), что она приобретает блочно-треугольный вид с длиной набора $|\{B\}|$ (подмножества строк $\varphi_{\kappa_i+1}, \ldots \varphi_{\kappa_{i+1}}$ будут являться блоками, $i = 1, \ldots |\{B\}|$).

Доказательство. Перестановки можно произвести по индукции. Блок B_1 с наименьшим ξ, содержащий $|B_1|$ строк и столько же столбцов, помещаем в верхнем левом углу матрицы. Пусть i блоков уже расположены и занимают в матрице κ_i строк сверху, а столбцы $\mathcal{D}(B_j),\ j \leq i$ – κ_i столбцов слева. Возьмем следующий по упорядочению блок B_{i+1} и переставим его строки так, чтобы они занимали места с $\kappa_i + 1$ по $\kappa_i + |B_{i+1}|$ Из теоремы 2 следует, что $S(B_{i+1}) \subseteq \{X_{\kappa_i+1}, \ldots, X_n\}$. Переставим их так, чтобы они занимали места с $\kappa_i + 1$ по $\kappa_i + |B_{i+1}|$.

Легко доказать также обратное утверждение: пусть некоторыми перестановками M приведена к блочно-треугольному виду с набором $\kappa_1, \ldots, \kappa_z$ максимальной длины по всем возможным перестановкам. Тогда семейства строк $B_i = \{\varphi_{\kappa_{i-1}+1}, \ldots, \varphi_{\kappa_i}\}$ являются блоками, а последовательность их расположения задает некоторые упорядочение. Это следует из того, что "блоки" приведенной матрицы порождаются квазиблоками $C_i = \{1, \ldots, \varphi_{\kappa_i}\}$ которые образуют некоторое подмножество квазиблоков. Отсюда $\forall B\ \exists j \,/\, B \subseteq \{\varphi_{\kappa_{j-1}+1}, \ldots, \varphi_{\kappa_j}\}$ и из максимальности набора $B = \{\varphi_{\kappa_{j-1}+1}, \ldots, \varphi_{\kappa_j}\}$.

Опишем алгоритм нахождения блоков приводимой матрицы (в случае неприводимой матрицы алгоритм выявит один "блок", содержащий все Φ).

Решим задачу "О представителях множеств", заданную матрицей M. В силу невырожденности A задача будет решена полностью. Это значит, что на двудольном графе $G_M=[\Phi,X;U]$, соответствующем этой задаче, найдено паросочетание P, отражающее Φ на X.

Теорема 3. Для $\forall B,\ P(B)=S(B)$.

Доказательство. Для $\forall C$, очевидно, $P(C)=D(C)$. т.к. $B=C(B)\setminus\bar{C}(B)$ и $S(B)=D(C(B))\setminus D(\bar{C}(B))$, то

$$P(B)=S(B)$$

Отождествим попарно вершины дуг паросочетания P и затем удалим петли. Полученный n – вершинный граф обозначим $G'_M=[X';U']$. Если строка φ и столбец X отождествлены, то соответствующую вершину в G'_M обозначим (φX)

Теорема 4. Пусть $L_1,\dots,L_K$ – бикомпоненты G'_M а $H(G'_M)$ – его граф Герца[I/]. Тогда I) если L_i образована вершинами $(\varphi_{i_1}, X_{P(i_1)}),\dots,(\varphi_{i_{r_i}}, X_{P(i_{r_i})})$, то $\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_{r_i}}$ образуют блок; 2) $H(G'_A)$ порождает частичное упорядочение блоков при этом соответствии.

Доказательство. Пусть $C=\{L_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ – множество бикомпонент, обладающее свойством открытости, т.е., если $L_\alpha\in O$ то $\forall L_{\alpha'}\prec L_\alpha,\ L_{\alpha'}\in O$. Иначе говоря, множество $X(C)=\{(\varphi_\beta, X_{P(\beta)})\}_{\beta\in B}$ вершин бикомпонент, принадлежащих O не имеет исходящих дуг в $X'\setminus X(O)$. Тогда, очевидно, множество $\{\varphi_\beta\}_{\beta\in B}$ является квазиблоком. Легко видеть, что верно и обратное утверждение: если C – квазиблок, то множество $X_C=\{(\varphi,P(\varphi))\}_{\varphi\in C}$ не имеет исходящих дуг, а, следовательно, образует некоторое открытое множество бикомпонент.

Отсюда, поскольку каждую бикомпоненту можно представить как разность 2-х открытых множеств фактор графа $H(G'_A)$ (так же как и каждый блок – разность 2-х квазиблоков), вытекает утверждение I.

Утверждение 2 следует из того, что указанный изоморфизм сохраняет структуру открытых множеств (если квазиблок считать открытым множеством в графе блоков).

Доказанные теоремы обосновывают следующий алгоритм приведения матрицы A (или M) к блочно-треугольному виду:

I/ Определение бикомпонент и графа Герца см., например, в [5]

I) Решаем задачу "о представителях множеств" с матрицей M. Если задача решена не полностью, то матрица вырожденная.

2) На графе задачи "о представителях" $G_M=[\Phi,X;U]$ склеивает попарно вершины, являющиеся концами дуг полученного паросочетания (получаем орграф G'_M).

3) Выделяем бикомпоненты графа G'_M и строим ациклический граф Герца $H(G'_M)$. Если бикомпонента всего одна, то матрица A неприводима.

4) Находим некоторое упорядочение $\{L_{i_1},\dots,L_{i_k}\}$ частично упорядоченного множества вершин графа $H(G_M)$.

5) Производим перестановку строк и столбцов матрицы в соответствии с упорядочением бикомпонент (строки и столбцы одной и той же бикомпоненты должны стоять подряд в произвольной последовательности).

Если число ненулевых элементов в матрице A есть p, то число действий в частях: I) – $C_{p\sqrt{n}}$, 2) C_n, 3) C_p [см. [7], существует также более простой алгоритм И.А.Фараджева [8] с оценкой $C(p+n\log_2 n))$, 4) – C_{n^2} [8], 5) C_n. Тем самым число действий оценивается числом действий алгоритма решения задачи "о представителях" – $C_{p\sqrt{n}}$. Заметим, что для справедливости наших оценок нужно, чтобы матрица A была задана перечнем своих ненулевых элементов (или задан двудольный граф G_M). В противном случае нужно потратить дополнительно C_{n^2} действий на составление перечня.

Примечание. Указанный алгоритм легко видоизменить с той же оценкой на нахождение критических множеств в двудольных графах с положительным дефицитом (см. [4]), или "блоков" вырожденной матрицы A.

Литература

1) Л.Форд, Д.Фалкерсон. Потоки в сетях. М., Мир, 1966.

2) Е.А.Диниц. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой. ДАН СССР, т.194, № 4 (1970).

3) Э.Б.Ершов. О выявлении и использовании структурных особенностей матриц в задачах планирования. "Экономика и математические методы", т.2, вып.2 (1966).

4) О.Оре. Теория графов. М., Наука, 1968.

5) А.А.Зыков. Теория конечных графов, т.I. Новосибирск, Наука, 1969.

6) А.В.Карзанов. Точная оценка алгоритма нахождения максимального потока, примененного к задаче "О представителях". "Вопросы кибернетики", № 2 (1972). Материалы Всесоюзного семинара по комбинаторной математике, янв. 1971г.

7) А.В.Карзанов. Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. Труды третьей зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. М., 1970.

8) И.А.Фараджев. Эффективные алгоритмы решения некоторых задач для ориентированных графов. "Журнал вычислительной математики и математической физики", т.10, № 4 (1970).