Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

Уральское математическое общество

Зосеньке с извинениями
за опоздание.

Ю.
8.V.66.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ

Том четвертый

Тетрадь 1

Свердловск — 1963

Ю. Ш. ГУРЕВИЧ

ГРУППЫ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с (1) будем говорить, что группа G имеет характеристическое покрытие и называть G X-группой, если каждый элемент G лежит в нетривиальной характеристической подгруппе. В противном случае будем говорить, что G не имеет характеристического покрытия и называть G $\bar{X}$-группой.

В § 1 даются достаточные условия того, чтобы группа была X-группой и доказывается теорема 1: «Фактор-группа конечной группы по пересечению ее максимальных характеристических подгрупп является $\bar{X}$-группой».

В § 2 приводятся различные примеры конечных X-групп. Это — основная часть работы.

В § 3 дается необходимое и достаточное условие того, чтобы периодическая абелева группа была X-группой.

В § 4 дается достаточное условие того, чтобы абелева группа без кручения была X-группой и необходимое и достаточное условие того, чтобы сепарабельная группа была $\bar{X}$-группой.

Все понятия и обозначения, используемые в (3), считаются известными. Кроме того,

$A \subset xB$ означает, что A — характеристическая подгруппа группы B;

$\{a\}_G$ (или просто $\{a\}$) есть обозначение наименьшей характеристической подгруппы G, содержащей элемент a;

$A \leftthreetimes B$ обозначает полупрямое произведение групп A и B, т. е. $A \leftthreetimes B$-группа, $A \leftthreetimes B = \{A, B\}$, A — инвариантная подгруппа и $A \cap B = 1$.

Работа выполнена под руководством профессора П. Г. Конторовича.

Автор приносит П. Г. Конторовичу, а также А. И. Старостину, В. М. Бусаркину, А. И. Кокорину, Г. М. Ромалису, С. Г. Иванову, которые обсуждали работу и сделали много ценных замечаний, глубокую благодарность.

I. ОБЩИЕ СВОЙСТВА.

ЛЕММА 1. Если $H \subset xG$ и G/H покрывается своими подгруппами, полные прообразы которых — характеристические подгруппы G, то G — X-группа.

Доказательство очевидно.

Следствие 1. Если все смежные классы группы G по подгруппе H — характеристические комплексы и G/H — нециклическая группа, то G — X-группа.

(Достаточно также требовать, чтобы характеристическими были не все упомянутые комплексы, а лишь те, которые соответствуют некоторой системе образующих группы G/H).

Этим следствием мы будем часто пользоваться в § 2.

Следствие 2. Если $H \subset xG$ и G/H — X-группа, то G — X-группа.

Следствие 3. Если $G = H \times F$, $H \subset xG$, F — X-группа, то G — X-группа.

Следствия 2 и 3 — аналоги «Основной леммы» и следствия ее из (2).

Утверждение следствия 2 не допускает обращения. Это следует из факта существования конечных X-групп и следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть H — пересечение максимальных характеристических подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_n$ конечной группы G. G/H — X-группа.*

Доказательство. Согласно (4), G/H изоморфна подгруппе прямого произведения групп G/H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Но G/H_i — элементарная группа, поэтому упомянутое прямое произведение есть вполне приводимая группа, т. е. прямое произведение простых групп; G/H, как и всякая подгруппа вполне приводимой группы, — вполне приводима.

Вполне приводимая группа разлагается в прямое произведение элементарных групп. Взяв элемент вполне приводимой группы, имеющий отличные от единицы компоненты в каждом элементарном прямом множителе, мы без труда убеждаемся, что он не лежит ни в каком нетривиальном характеристическом делителе. Этим доказательство закончено.

Заметим, что пересечение всех максимальных характеристических подгрупп конечной группы содержит и Φ-подгруппу и пересечение всех максимальных инвариантных подгрупп. Это следует из следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть Ω_1, Ω_2 — области операторов конечной группы G, а Φ_1, Φ_2 — пересечения всех максимальных соответственно Ω_1, Ω_2 — допустимых подгрупп. Если $\Omega_1 \leqslant \Omega_2$ и Φ_1 Ω_2 — допустима, то $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$.

Доказательство. Пусть M_2 — максимальная Ω_2 — допустимая подгруппа и $\Phi_1 \nless M_2$ и $\Phi_1 \neq M_2$. Тогда $\{M_2, \Phi_1\} = G$.

Но, с другой стороны, M_2 лежит в некоторой максимальной Ω_1-допустимой подгруппе, которая содержит и Φ_1. Поэтому $\{M_2, \Phi_1\} \neq G$. Противоречие доказывает.

2. Конечные X—группы

1. Следующая группа является наименьшей по числу элементов конечной группой, имеющей характеристическое покрытие.

$$G = \{a\} \times \{b\},\ a^8 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^3.$$

Коммутант G^1 равен $\{a^2\}$. $G/\{a^2\}$ — четверная группа Клейна, поэтому G имеет всего 3 максимальных подгруппы. Одна из них — циклическая, другая — группа диэдра, третья — группа кватернионов. Они попарно неизоморфны, а потому характеристические.

Примечание. Если в определении группы G вместо $a^8 = 1$ потребовать $a^{2^n} = 1$ и $n > 3$, то G тоже будет X-группой.

В самом деле, как и раньше, $G^1 = \{a^2\}$. Поэтому $\{a^8\} \subset xG$. Рассматривает $G/\{a^8\}$ и применяем следствие 2 леммы 1.

2. *ЛЕММА 3. Пусть X-характеристическое множество группы G; n — фиксированное натуральное число; $У$ — множество тех элементов y, что для всех x из X $y^{-1}xy = x^n$; Z — множество тех элементов z группы G, что для всех x из X* из $z^{-1}xz \in \{x\}$ и $zx \neq xz$ следует $z^{-1}xz = x^n$.

Тогда $У$ и Z — характеристические множества.

Доказательство. Пусть φ — автоморфизм группы G и $x \in X$. Тогда $(\varphi y)^{-1}x(\varphi y) = \varphi(y^{-1}(\varphi^{-1}x)y) =$

$$= \varphi((\varphi^{-1}x)^n) = (\varphi\varphi^{-1}x)^n = x^n.$$

Пусть $(\varphi z)^{-1}x(\varphi z) \in \{x\}$, $(\varphi z)x \neq x(\varphi z)$. Умножим слева на φ^{-1}. Имеем $z^{-1}(\varphi^{-1}x)z = (\varphi^{-1}x)^n$. Откуда $(\varphi z)^{-1}x(\varphi z) = x^n$.

Приведем теперь класс примеров конечных p-групп, имеющих характеристическое покрытие (p-произвольное простое число).

$$G = [\{a\} \rightthreetimes \{b\}] \times [\{c\} \rightthreetimes \{d\}]$$
$$a^{p^\alpha} = b^{p^\beta} = c^{p^\gamma} = d^{p^\delta} = 1.$$

$$b^{-1}ab = a^{1+p^{\alpha-\beta}},\ d^{-1}cd = c^{1+p^{\gamma-\delta}},$$

$\beta < \alpha < 2\beta$, $\delta < \gamma < 2\delta$, $\alpha - \beta < \gamma - \delta$. ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — натуральные числа. Пример реализации: $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 5$, $\delta = 3$). Коммутант $G' = \{a^{p^{\alpha-\beta}}\} \times \{c^{p^{\gamma-\delta}}\}$. Централизатор коммутанта (характеристическая подгруппа) $зG' = [\{a\} \rightthreetimes \{b^{p^{2\beta-\alpha}}\}] \times [\{c\} \rightthreetimes \{d^{p^{2\delta-\gamma}}\}]$
$G/зG' = \{\bar{b}\} \times \{\bar{d}\}$, где $\bar{b} = bзG'$, $\bar{d} = dзG'$, $\bar{b}^{p^{2\beta-\alpha}} = \bar{d}^{p^{2\delta-\gamma}} = 1$.

Множество $bзG^1$ состоит из всех тех и только тех элементов z группы G, что для всех x из G^1 из $zx \neq xz$, $z^{-1}xz \in \{x\}$ следует $z^{-1}xz = x^{p^{\alpha-\beta}}$.

Множество $db^{p^{(\gamma-\delta)-(\alpha-\beta)}}зG^1$ состоит из всех тех и только тех элементов группы G, которые возводят все элементы G^1 в степень $p^{\gamma-\delta}$.

Комплексы $db^{p^{(\gamma-\delta)-(\alpha-\beta)}}зG^1$ и $bзG^1$ согласно лемме 3 — характеристические. Кроме того, они являются образующими группы $G/зG^1$. Пользуемся следствием 1 леммы 1. G — X-группа.

3. Примеры разрешимых, но ненильпотентных конечных X-групп даст нам следующая теорема.

Теорема 2. Голоморф Γ циклической группы $\{a\}$ нечетного порядка n является X-группой тогда и только тогда, когда n — степень простого числа.

Доказательство. 1) $n=p^{\alpha}$, где p — простое число. В этом случае, как доказывается в курсах теории чисел, группа автоморфизмов B группы $\{a\}$ — циклическая: $B=\{b\}$. Соответствие $a \to a^{-1}$, $b \to b$ порождает автоморфизм группы Γ. Поэтому $\{\overline{\overline{ab}}\}_{\Gamma} \ni ab(a^{-1}b)^{-1}=a^2$. Так как, кроме того, n—нечетно, то $\{\overline{\overline{ab}}\} \ni a$. Тогда $b=a^{-1}\cdot ab \in \{\overline{\overline{ab}}\}$, $\{\overline{\overline{ab}}\}=\Gamma$.

2) n не есть степень простого числа. В этом случае группа автоморфизмов B группы $\{a\}$ — нециклическая.

Для всякого элемента b из B существует число m такое, что $\{o\}$ b есть множество всех тех и только тех элементов, которые взводят все элементы $\{a\}$ в одну степень m. Применяем лемму 2, затем следствие 1 леммы 1. Γ — X-группа.

4. Построим класс примеров неразрешимых X-групп.

Пусть A — группа без центра и коммутант ее имеет в ней индекс 2.

Например, A — симметрическая группа степени $n \geqslant 3$. Тогда группа G, определяемая равенствами, $G=A \times \{b\}$, $b^4=I$ — есть X-группа.

В самом деле, $G^1=A^1$. $\{b\}=ZG < xG$. Отсюда $\{b^2\} < xG$, $G' \times \{b\} < xG$ и $G' \times \{b^2\} < xG$. Далее, образ $A \times \{b^2\}$ в G/G' есть нижний слой G/G', поэтому $A \times \{b^2\} < xG$.

G имеет всего 3 подгруппы, содержащие характеристическую подгруппу $G^1 \times \{b^2\}$ и покрывается ими. Две из этих трех, по доказанному выше, характеристические. Поэтому и третья характеристическая. Все доказано.

3. Периодические абелевы X—группы

В этом и в следующем параграфе используется аддитивная запись.

Знак суммы обозначает прямую сумму.

Порядком бесконечной циклической группы, а также ее образующего элемента, считается число нуль.

ЛЕММА 4. Пусть G — абелева группа и $G=A \times \{b\}$. Если порядок любого элемента из A есть делитель порядка элемента b, *то G — X-группа.*

Доказательство. Любой элемент из G можно записать в виде, где $a+nb$. Пусть a^1 — произвольный элемент, (фиксированный) из A. Отображение $a+nb \to a+n(a^1+b)$, очевидно, является автоморфизмом. Отсюда $a^1 \in \{\overline{\overline{b}}\}$, а поэтому $\{\overline{\overline{b}}\}=G$.

СЛЕДСТВИЕ. Абелева группа с конечным числом образующих X-группа. (Этот факт отмечается в (1).

Теорема 3. *Периодическая абелева группа является X-группой тогда и только тогда, когда порядки элементов ее неограничены.*

Доказательство. G — периодическая абелева группа.

1). $G=UB_n$, где B_n — совокупность элементов порядка $\leqslant n!$. (Некоторые B_n могут совпадать).

G — сепарабельная группа, N — множество типовы групп ранга 1, выделяющихся прямыми слагаемыми G.

(Если G вполе разложима, то N — множество типов некоторого разложения G в прямую сумму групп ранга 1, ибо два таких разложения изоморфны).

Теорема 5. *G — $\overline{X}$-группа тогда и только тогда, когда выполнены сразу следующие условия:*

1) N, как упорядоченное множество типов, удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек элементов;

2) Число минимальных элементов N конечно;

3) Все минимальные элементы N — чистые типы;

4) Пусть s_1 s_2 — минимальные элементы.

Неверно, что одновременно имеет место то, что 2 — компоненты характеристик типов s_2 и s_2 конечны и то, что в G выделяется сразу не более, чем по одному слагаемому типов s_1 и s_2.

Примечание. Условия 4) можно сформулировать в явной форме:

4′) за исключением не более одного все минимальные элементы N удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий:

4а) 2-компонентна характеристик данного типа $= \infty$.

4б) существует разложение G, содержащее не менее двух прямых слагаемых, являющихся группами ранга 1, данного типа.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1), 2), 3), 4).

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_{m+1}$ — все минимальные типы N. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k$ — удовлетворяют условию 4б), а $s_{k+1}, \ldots, s_m$ — удовлетворяют 4а).

По условию существуют разложения $G = B_j + H_j$, где $B_j = A_j + A_j^1$ $(k \leqslant j)$, $B_j = A_j$ $(k < j \leqslant m+1)$: A_j, A_j^1 — группы ранга 1 типа s_j. Элементы $G - (B_j \cup H_j)$ имеют тип $\leqslant s_j$. Поэтому $B_2 \leqslant H_1$. Отсюда $G = B_1 + B_2 + (H_1 \cap H_2)$, $B_3 \leqslant (H_1 \cap H_2)$. $G = B_1 + B_2 + B_3 + (H_1 \cap H_2 \cap H_3)$. Продолжая этот процесс, получим $G = B_1 + \ldots + B_{m+1} + H$.

Пусть a_j — чистый элемент из A_j. Рассмотрим $c = a_1 + \ldots + a_{m+1}$ и $C = \overline{\{c\}}$. Если $m = 0$, то G — X-группа в силу леммы 6.

Если $k > 0$ и $j \leqslant k$, то существует автоморфизм φ, оставляющий все A_i при $i \neq j$ на месте и переводящий A_j в A_j^1. При этом a_j переходят в некоторый a_j^1 из A_j^1. $a_j - a_j^1 = c - \varphi c \in C$. Легко доказать, что a_j и $a_j - a_j^1$ подобны. Поэтому и $a_j \in C$.

Если $k < j \leqslant m$, то s_j удовлетворяет условию 4а), т. е. существуют автоморфизм, переводящий a_j в $2a_j$. Кроме того, существует автоморфизм ψ, оставляющий A_i при $i \neq j$ поэлементно на месте, а элементы A_j переводящий в обратные. А поэтому $2a_j = c - \psi c \in C$. $a_j \in C$. Итак, элементы $a_1, \ldots, a_m \in C$, но $a_{m+1} = c - a_1 - \ldots - a_m$ и $a_{m+1} \in C$. Согласно лемме 6, $\overline{\{a_j\}} = G_{s_j}$. Отсюда $c \geqslant \{G_{s_1}, \ldots, G_{s_{m+1}}\}$. Но всякий элемент G лежит во вполне разложимом прямом F группы G. Если s — тип прямого слагаемого ранга 1 из F, то существует s_j, что $s_j \leqslant s$, так как $s \in N$. Поэтому $F \leqslant C$ и G — $\overline{X}$-группа.

Пусть теперь G — $\bar{X}$-группа.

Существует g из G такой, что $G = \overline{\overline{\{g\}}}$. g лежит во вполне разложимом прямом слагаемом F конечного ранга. Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — типы прямых слагаемых ранга 1 некоторого разложения F в прямую сумму групп ранга 1: $F = \sum_{j}^{n} A_j$.

$$G = \overline{\{g\}} = \overline{\{F\}} = \overline{\{A_1, \ldots, A_n\}} = \{\overline{\{A_1\}}, \ldots, \overline{\{A_n\}}\} = \{G_{s_1}, \ldots, G_{s_n}\}.$$

Пусть существует разложение: $G = A + B$, где A — группа ранга 1 такого типа t, что среди типов $s_1, \ldots, s_n$ нет $\leqslant t$. Тип s элемента из $G - (A \cup B) \leqslant t$, поэтому не может быть $s_j \leqslant s$. Отсюда $G_{s_1} \leqslant B, \ldots, G_{s_n} \leqslant B$, а потому и $G = B$. Противоречие доказывает, что условия 1) и 2) выполнены.

Пусть s — минимальный тип и не чистый. Тогда s является единственным в $\bar{G} = G/\{\bigcup_{s > t \text{ и } s \neq t} G_t\}$. Поэтому $\bar{G}$ не обладает наименьшей характеристикой. $\bar{G}$, а вместе с ней и G — X-группы.

Пусть нарушено условие 4) и s_1, s_2 — соответствующие типы. Существует разложение: $G = A_1 + H_1$, где A_1 — группа ранга 1 типа s_1. $H_1 = \{\bigcup_{s < t \text{ и } s \neq t} G_t\}$.

В самом деле, $G_t \leqslant H_1$. С другой стороны, пусть x и y — два произвольных элемента G. x и y лежат в некотором прямом слагаемом F_1 группы G. Но кроме, быть может одного, все прямые слагаемые ранга 1 данного разложения F_1 в прямую сумму ранга 1 лежат в $\{\bigcup_{s < t \text{ и } s \neq t} G_t\}$. Поэтому образы x и y в $\bar{G} = G/\{\bigcup_{s < t \text{ и } s \neq t} G\}$, линейно независимы. Т. е. $\bar{G}$ ранга 1 (и, разумеется, без кручения, т. к. $\{\bigcup_{s < t \text{ и } s \neq t} G_t\}$ сервантна в G). Но $G \cong A + H/\{\bigcup_{s < t \text{ и } s \neq t} G_t\}$. Отсюда $H_1 \leqslant \{\bigcup_{t < s_1 \text{ и } t \neq s_1} G_t\}$.

Аналогично, $G = A_2 + H_2$, где A_2 — группа ранга 1 типа s_2 и $H_2 < x\, G$. Тогда $G = A_1 + A_2 + (H_1 \cap H_2)$ и $H_1 \cap H_2 < x G$. Согласно лемме 7, $G/H_1 \cap H_2$ — X-группа, поэтому и G — X-группа. Теорема доказана.

Отметим, что выполнение условий 1), 2), 3) одновременно равносильно отсутствию в G локальной системы характеристических подгрупп.

Литература

1. **П. Г. Конторович, А. С. Пекелис, А. И. Старостин.** Структурные вопросы теории групп. Ученые записки Уральского университета, т. 3, тетр. 1 (1961) стр. 3—50.

2. **П. Г. Конторович.** Инвариантно покрываемые группы, 1. Мат. сб. — (нов. с), 8(1940), стр. 423—436.

3. **А. Г. Курош.** Теория групп, Гостехиздат, (1953 г.).

* Remak R. Uber die erzeugenden invarianteu Untergruppen den supdirekten Darstellungen endlicher Gruppen, J. reine angew. Math., 164(1931), 197—242.

Поступила 26/IX—62 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НС 20264 15.II-1963 г. Объём 5¼ п. л. Тираж 500. Заказ № 3

Свердловск, улица 8 Марта, 62, Типолаборатория УрГУ