ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1966

Том 168, № 3

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 168, № 3

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

Ю. Ш. ГУРЕВИЧ

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ УЗКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

(Представлено академиком А. И. Мальцевым 1 XI 1965)

Пусть Φ — класс формул. Будем говорить, что Φ разрешим, если проблемы распознавания выполнимости и конечной выполнимости формул класса Φ алгоритмически разрешимы. Будем говорить, что Φ есть класс сведения, если существует алгоритм, который всякой формуле α узкого исчисления предикатов со знаком равенства ставит в соответствие такую формулу $\beta \in \Phi$, что α и β одновременно выполнимы или не выполнимы и одновременно выполнимы или не выполнимы на конечных моделях.

В [1] приведена сводка результатов по проблеме разрешения. Формулируемые ниже следствия вытекают из этих результатов и теоремы настоящей статьи. При этом F везде есть символ двуместного предиката, а M обозначает бескванторную формулу.

Теорема. *Класс формул УИП без знака равенства вида*

$$\forall x \exists u \forall y \exists z_1 \ldots z_n M(F; x, u, y, z_1, \ldots, z_n) \tag{1}$$

есть класс сведения.

Пусть Π — некоторое множество слов алфавита $\{\forall, \exists\}$, а σ — набор символов предикатов. Через $\Phi(\Pi, \sigma)$ обозначим класс всех формул УИП без знака равенства вида

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n M(\sigma; x_1, \ldots, x_n),$$

где $Q_1 \ldots Q_n \in \Pi$. Через $\Phi^*(\Pi, \sigma)$ обозначим соответствующий класс формул УИП со знаком равенства.

Следствие 1. *Либо* $\Phi(\Pi, \sigma)$ *разрешим, либо он есть класс сведения. То же относится и к* $\Phi^*(\Pi, \sigma)$.

Следствие 2. $\Phi(\Pi, \sigma)$ *разрешим тогда и только тогда, когда* $\Phi^*(\Pi, \sigma)$ *разрешим.*

Следствие 3. *Пусть* $\Pi_2 = \{\exists^m \forall^i \exists^n \mid i = 1, 2;\ m, n = 0, 1, \ldots\}$

$$\Pi_1 = \{\exists^m \forall^n \mid m, n = 0, 1, \ldots\}, \quad \cancel{\Pi_2 = \{\exists^m \forall^2 \exists^n \mid m, n = 0, 1, \ldots\}}.$$

$\Phi(\Pi, \sigma)$ *разрешим в том и только том случае, когда имеет место хотя бы одна из следующих трех возможностей:*

а) σ *содержит лишь символы одноместных предикатов;*

б) $\Pi \subseteq \Pi_1 \cup \Pi_2$;

в) σ *и* $\Pi \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2)$ *конечны.*

Следствие 4. *Если* $\Phi^*(\Pi, \sigma)$ *разрешим, то, за исключением конечного числа формул, выполнимость для формул* $\Phi^*(\Pi, \sigma)$ *совпадает с выполнимостью на конечных моделях.*

Замечание. Указанные следствия для случая бесконечной σ даны в работах группы американских математиков во главе с Wang Hao.

Наметим доказательство теоремы. Пусть $i = \varepsilon(i) + 2\delta(i)$ — двоичная запись, $i = 0, 1, 2, 3$, и пусть

$$\varphi = \forall x \exists u \forall y \exists z_1 \ldots z_n (A_0 . A_1 \ldots A_l . M)$$

формула вида (1). Вместо Fab будем писать просто ab.

$$A_0 = (\neg xx . yy \supset \neg uu . (xu \sim xy) . (ux \sim yx)) . z_1 z_1 .$$

Положим $f_0{}^i x \sim \neg xx . (-1)^{\varepsilon(i)} xu . (-1)^{\delta(i)} \bigcup x$. В силу A_0 $f_0{}^i u$ можно считать сокращением для $\neg uu . (-1)^{\varepsilon(i)} u z_1 . (-1)^{\delta(i)} z_1 u$.

$$A_1 = [\neg xx . \neg f_0^3 x . f_0^3 y \supset \neg uu . \neg f_0^3 u . \bigwedge_{i=0}^{2} (f_0^i u \sim (-1)^{\varepsilon(i)} xy . (-1)^{\delta(i)} yx)] . f_0^3 z_2 .$$

Положим при $i = 0, 1, 2$ $f_1{}^i x \sim \neg xx . \neg f_0{}^3 x . f_0{}^i u$. При этом $f_1{}^i u$, в силу A_1, можно считать сокращением для $\neg uu . \neg f_0{}^3 u . (-1)^{\varepsilon(i)} u z_2 . (-1)^{\delta(i)} z_2 u$. и т. д., так что в M мы можем пользоваться уже бóльшим числом одноместных предикатов. Затем применяется теорема из (2).

Автор выражает благодарность акад. А. И. Мальцеву за постановку задачи.

~~Красноярский государственный педагогический институт~~

Поступило
28 X 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Ф. Костырко, Алгебра и логика, 3, 5—6, 45 (1964). [2] Ю. Ш. Гуревич, ДАН, 166, № 5 (1966).

Уральский госуниверситет

г. Свердловск