А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 2 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ РАСПОЗНАВАНИИ ВЫПОЛНИМОСТИ ФОРМУЛ УИП

Ю.Ш.Гуревич

В в е д е н и е

1. Слово "формула" обозначает в данной статье формулу узкого исчисления предикатов (УИП) с символом равенства. Символы предикатов набираются из некоторого фиксированного списка, который содержит бесконечное число одноместных, двуместных и т.д. предикатов. Предполагается некоторая фиксированная гёделева нумерация формул. Если φ - формула, то $[\varphi]$ будет обозначать её гёделев номер.

2. Часто мы будем использовать машины Тьюринга. Всегда будем предполагать, что лента ограничена с одной стороны и имеются в точности два ленточных символа - 0 и 1. Крайней ячейке припишем номер ноль. Состояния машины будем называть - $q^0, q^1, \dots$. Будем говорить, что на ленте записано число n, если в ячейках с номерами $\leqslant n$ стоят единички, а во всех других ячейках стоят нулики. Будем говорить, что машина Тьюринга начинает с n, если в начальный момент её состояние было q^0 и на ленте было записано n.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс Φ формул назовем разрешимым, если существует такая машина Тьюринга X, которая начиная с $[\varphi]$, какова бы ни была $\varphi \in \Phi$, остановится через конечное число ша-

гов и при этом на ленте будет записано $0,1$ или 2 в зависимости от того, является ли φ соответственно, невыполнимой, конечно выполнимой или она имеет бесконечные и только бесконечные модели.

Таким образом, для разрешимого класса формул эффективно распознаваемы и выполнимость, и конечная выполнимость формул. При этом подкласс разрешимого класса оказывается разрешимым.

4. Посредством $\alpha \to \beta$ будем записывать тот факт, что:

4.I. если α выполнима, то и β выполнима и

4.2. если α конечно выполнима, то и β конечно выполнима. Вместо " $(\alpha \to \beta) \& (\beta \to \alpha)$ " будем писать " $\alpha \leftrightarrow \beta$ ". (Символом импликации будет " $\supset$ ", эквивалентности – " $\sim$ ").

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что класс Ψ формул сводится к классу Φ , если существует такая машина Тьюринга X , которая начиная с гёделева номера произвольной $\psi \in \Psi$ остановится через конечное число шагов и при этом на ленте будет записан гёделев номер некоторой $\varphi \in \Phi$; причем, $\psi \leftrightarrow \varphi$. Класс Φ называется классом сведения, если к нему сводится класс всх формул.

Так что класс, содержащий класс сведения, есть класс сведения. Отметим также, что если класс Φ формул есть класс сведения, то он есть также и то, что называют обычно "класс сведения по выполнимости" и то, что называют обычно "класс сведения по конечной выполнимости".

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Π – некоторая совокупность слов алфавита $\{\forall,\exists\}$, а σ – некоторая совокупность символов предикатов (сигнатура). Через $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ обозначим класс всех пренексных формул без свободных переменных с приставками из Π и нелогическими константами из σ . Через $\Phi(\Pi,\sigma)$ обозначим соответствующий класс формул без символа равенства. (Символ равенства считаем логической константой).

6. Исследования по разрешимым классам и классам сведения интенсивно ведутся ещё со времен Лёвенгейма и Сколема (см. [I6]). Интерес к ним лишь повысился, когда были доказаны теоремы Чёрча и Трахтенброта, показавшие, что для класса всех формул ни выполнимость, ни конечная выполнимость не являются эффективно распознаваемыми свойствами. Большей частью предметом исследований были классы $\Phi(\Pi,\sigma)$.

Содержание нашей статьи, за исключением последней главы, составляет доказательство следующих теорем, которые вытекают из многих известных теорем и теоремы II автора (см. ниже).

ТЕОРЕМА I. Либо $\Phi(\Pi,\sigma)$ разрешим, либо он есть класс сведения. То же относится и к $\Phi^*(\Pi,\sigma)$.

ТЕОРЕМА 2. $\Phi(\Pi,\sigma)$ разрешим в тех и только тех случаях, когда $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ разрешим.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\Pi_1=\{\exists^m\forall^n \mid m,n=0,1,\ldots\},$$
$$\Pi_2=\{\exists^m\forall^i\exists^n \mid i=1,2;\ m,n=0,1,\ldots\}$$

$\Phi(\Pi,\sigma)$ разрешим в тех и только тех случаях, когда имеет место хотя бы одна из следующих трёх возможностей:

а) σ содержит лишь символы одноместных предикатов,

б) $\Pi\subseteq(\Pi_1\cup\Pi_2)$

в) σ и $\Pi\setminus(\Pi_1\cup\Pi_2)$ конечны.

ТЕОРЕМА 4. Если $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ разрешим, то за исключением конечного числа формул выполнимость для формул из $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ совпадает с конечной выполнимостью.

7. Обращаем особое внимание на теорему I. Из неё следует, в частности, что если выполнимость формул из $\Phi(\Pi,\sigma)$ эффективно распознаваема, то и конечная выполнимость формул из $\Phi(\Pi,\sigma)$ тоже эффективно распознаваема. И наоборот. Аналогично, если $\Phi(\Pi,\sigma)$ класс сведения по выполнимости, то он есть и класс сведения по конечной выполнимости и наоборот.

Теорема 4 следует из теоремы 3 согласно содержанию главы I. Более того, из результатов главы I вытекает, что если $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ разрешим, то алгоритм распознавания выполнимости формул из $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ довольно прост.

8. В главе I доказывается, что в случаях а) – в) теоремы 3 $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ разрешим. Пусть L – совокупность тех $\Phi(\Pi,\sigma)$, которые не подпадают ни под один из случаев теоремы 3. Элементы L упорядочим следующим образом:

$$\Phi(\Pi_1,\sigma_1)\leqslant\Phi(\Pi_2,\sigma_2),$$

если Π_1 содержится в замыкании Π_2 относительно подслов и существует такое взаимно однозначное отображение σ_1 в σ_2 , которое не уменьшает числа мест символов предикатов из σ_1 .

ЛЕММА I. Если $\Phi(\Pi_1,\sigma_1)\leqslant\Phi(\Pi_2\sigma_2)$ и $\Phi(\Pi_1,\sigma_1)$ есть класс сведения, то и $\Phi(\Pi_2,\sigma_2)$ есть класс сведения.

Доказательство очевидно.

Ниже везде буква F с индексами и без есть символ двуместного предиката, f - одноместного.

ЛЕММА 2. Каждый элемент L больше или равен (в смысле определенного выше порядка) одного из следующих минимальных элементов:

8.I. $\Pi=\{\forall E\forall\}$, $\sigma=\{F,f_0,f_1,\ldots\}$.

8.2. $\Pi=\{\forall^3\exists\}$, $\sigma=\{F,f_0,f_1,\ldots\}$.

8.3. $\Pi=\{\exists^n\forall^3\exists\mid n=0,1,\ldots\}$, $\sigma=\{F\}$.

8.4. $\Pi=\{\forall^n\exists\mid n=0,1,\ldots\}$, $\sigma=\{F\}$.

8.5. $\Pi=\{\forall\exists\forall^n\mid n=0,1,\ldots\}$, $\sigma=\{F\}$.

8.6. $\Pi=\{\forall^3\exists^n\mid n=0,1,\ldots\}$, $\sigma=\{F\}$.

8.7. $\Pi=\{\exists^n\forall\exists\forall\mid n=0,1,\ldots\}$, $\sigma=\{F\}$.

8.8. $\Pi=\{\forall\exists^n\forall\mid n=0,1,\ldots\}$, $\sigma=\{F\}$.

8.9. $\Pi=\{\forall\exists\forall\exists^n\mid n=0,1,\ldots\}$, $\sigma=\{F\}$.

Доказательство самое непосредственное. Мы его опускаем.

Таким образом, для доказательства теорем I-3 достаточно доказать, что классы 8.I. - 8.9. есть классы сведения. Этому посвящены главы 2 - 4.

9. Обзор интересующих нас результатов можно найти (на 1956 г.) в [I6] и (на 1959 г.) в [I4]. Потом (в 1962 году) появилась замечательная работа Бьюхи [I], которая сильно продвинула исследования в этой области. В том же году группа американских математиков (Хао Ван, А.Кар, Е.Моор, Дентон, Б.Дребен) доказывает, что класс 8.I. есть класс сведения по выполнимости и (видимо, несколько позже) по конечной выполнимости. Они фактически, доказывают теоремы I-4 для случая бесконечной σ. Для конечной сигнатуры после их работ остались неизвестными, в основном, случаи 8.8. и 8.9. Доказательство того факта, что класс 8.8 есть класс сведения есть содержание статьи [9]. Там же содержится краткая сводка результатов с указанием, что остался единственный случай 8.9. Академик А.И.Мальцев предложил автору заняться этим послед -

ним случаем. Результат этих занятий - заметки [3] , [4] и эта статья.

К сожалению, доступные работы американских авторов недостаточны для того, чтобы можно было сослаться, что классы 8.I - 8.7 есть классы сведения. Для каждой из этих теорем, а также для теорем о разрешимых классах мы приводим доказательство, если не обладаем точной ссылкой.

I0.I. Договоримся, что готические буквы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$ (возможно, с индексами) обозначают бескванторные формулы.

I0.2. Если α - формула, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = \neg\alpha$.

I0.3. Если $\mathfrak{M}$ - модель, $|\mathfrak{M}|$ обозначает основное множество $\mathfrak{M}$.

I0.4. ЛЕММА 3. Пусть $\alpha = \forall x \exists u\, \beta(x,u)$, где β , вообще говоря, содержит кванторы. Пусть " / " есть символ одноместной функции, не встречающийся в β . Положим, $\gamma = \forall x\, \beta(x,x')$. Имеет место $\alpha \longleftrightarrow \gamma$. (См. п. 4).

Доказательство очевидно.

Эту лемму мы будем очень часто использовать.

Автор рад выразить благодарность академику А.И.Мальцеву за постановку задачи.

Глава I. Разрешимые случаи

§ I. Одноместные предикаты

I. ЛЕММА I. Если каждая выполнимая формула класса Φ конечно выполнима, то Φ разрешим.

Факт хорошо известный и очевидный.

2. ТЕОРЕМА 5. Пусть φ - пренексная формула без свободных переменных. Пусть n - длина приставки φ и ℓ - число различных нелогических констант в φ . Причем, все они - символы одноместных предикатов. И пусть φ выполнима. Тогда она выполнима уже на модели с числом элементов $\leqslant n \cdot 2^{\ell}$.

Напомним, что φ содержит, вообще говоря, символ равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ - символы предикатов из φ. Через $g_0(x),\dots,g_{2^\ell-1}(x)$ обозначим всевозможные конъюнкции вида $h_0(x)\&\dots\&h_{\ell-1}(x)$, где h_i есть f_i или $\neg f_i$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – модель для φ. Через m_i обозначим кардинальное число элементов $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих g_i. Положим

$$n_i = \min(m_i, n).$$

Пусть $\mathfrak{N}$ – модель сигнатуры $\{f_0,\dots,f_{\ell-1}\}$, содержащая в точности n_i элементов, удовлетворяющих g_i. Воспользуемся теперь игрой G_n из [17]. Достаточно доказать, что игрок 2 имеет выигрышную стратегию в $G_n(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$. Но эта стратегия достаточно очевидна.

3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть σ содержит лишь символы одноместных предикатов. Каждая выполнимая формула из $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ конечно выполнима. $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ разрешим. См. [16], стр. 275–276.

§ 2.

I. ТЕОРЕМА 6. Пусть φ – выполнимая пренексная формула без свободных переменных с приставкой $\exists^m\forall^n$. φ выполнима на модели с числом элементов $\leqslant m$.

Доказательство очевидно.

2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Pi=\{\exists^m\forall^n \mid m,n=0,1,\dots\}$. Каждая выполнимая формула из $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ конечно выполнима. $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ разрешим. См. [16].

§ 3.

I. ТЕОРЕМА 7. ([12],[13]). Пусть выполнимая

$$\alpha=\exists x_1\dots x_m\forall y_1 y_2\exists z_1\dots z_n\,\mathfrak{A}(x_1,\dots,z_n),$$

где $\mathfrak{A}$ содержит всего k символов предикатов, каждый из которых имеет $<h$ мест. Тогда α уже выполнима на модели с числом элементов $\leqslant m+20^{\nu}$, где $\nu=k\cdot n^2\cdot 2^h\cdot(m+1)^{h+4}$.

2. СЛЕДСТВИЕ. ([5], [7], [12], [13]). Пусть

$$\Pi=\{\exists^m\forall^2\exists^n \mid m,n=0,1,\dots\}.$$

К а ж д а я в ы п о л н и м а я ф о р м у л а и з $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ к о н е ч н о в ы п о л н и м а. $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ р а з р е ш и м.

Глава 2

§ I. Специальная машина Тьюринга

I. Состояние q^i машины Тьюринга будем называть стоп-состоянием, если попав в q^i, машина останавливается.

2. Пусть X_1 - машина Тьюринга, выводящая все следствия из аксиом УИП; X_2 - машина Тьюринга, проверяющая выполнимость формул на конечных моделях. Используя эти машины, можно построить такую машину Тьюринга X^*, которая начиная с гёделева номера $[\alpha]$ произвольной α :

2.I. попадет в стоп-состояние q^1, если α невыполнима;

2.2. попадёт в стоп-состояние q^2, если α конечно выполнима;

2.3. будет работать, не зацикливаясь (а, значит и не останавливаясь; остановка - частный случай зацикливания), если α имеет бесконечные и только бесконечные модели.

Эту машину мы и будем использовать в настоящей главе.

§ 2.

I. "$'$" есть символ одноместной функции.

2. Пусть $\mathfrak{A}_1$ есть конъюнкция следующих формул:

2.I. $\neg Ax . \neg Ay . Sxy \supset Kx'y$,

2.2. $Kyx \supset \neg Ax' . Syx'$,

2.3. $Ay . Syx \supset Ax'$.

3. Положим: $\chi(x) = \forall xy \mathfrak{A}_1 \& \exists z_0 \ldots z_n \mathfrak{A}_2^n$,

где $\mathfrak{A}_2^n$ есть

$$Az_0 . \bigwedge_{i=0}^{n-1} \neg Az_{i+1} . \bigwedge_{i=0}^{n-1} Sz_i z_{i+1} . \bigwedge_{j \neq i+1} \neg Sz_i z_{i+1} .$$

4. ЛЕММА I. П у с т ь $\mathfrak{M}$ - м о д е л ь д л я $\chi(n)$ и $z_0, \ldots, z_n$ - э л е м е н т ы $\mathfrak{M}$, у д о в л е т в о р я ю щ и е (соответственно подставленные) $\mathfrak{A}_2^n$.
Т о г д а $\mathfrak{M} \vdash A(z_n^{(n)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

4.I. Из Az_0, Sz_0z_1 и 2.3 следует Az_1'.

4.2. Из $\neg A z_1$, $\neg A z_2$, $S z_1 z_2$ и 2.I. следует $K z_1' z_2$. Из $K z_1' z_2$ и 2.2. следует $S z_1' z_2'$. Из $A z_1'$, $S z_1' z_2'$ и 2.3. следует $A z_2''$ и т.д.

§ 3.

Через $\mathfrak{L}$ обозначим конъюнкцию формул, выписанных в следующем параграфе. $\mathfrak{L}$ описывает работу машины X^* . Не зафиксировано лишь, с какого числа начинает X^* . При этом подразумевается следующая содержательная интерпретация:

I. Область изменения переменных - натуральные числа;

2. $x' = x+1$;

3. $\mathcal{O}x - x = 0$;

4. Tx - x есть момент времени;

5. Nx - x есть номер ячейки;

6. Kxy - в момент времени x обозревается ячейка номера y ;

7. Hxy - в момент x обозревается ячейка $y+1$;

8. Sxy - в момент x в ячейке y стоит единичка;

9. $q^i x$ - в момент x состояние q^i ;

IO. $L^1 x$, $L^2 x$, $L^3 x$ - в момент x дается команда движения влево, движения вправо, обозревать ту же ячейку, соответственно.

Напомним, что если α - формула, то $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = \neg\alpha$.

§ 4. $\mathfrak{L}$

I. $Tx \sim Tx'$, $Nx \sim Nx'$.

2. $Tx \supset \{[L^1x \vee L^2x \vee L^3x] \& \neg(L^1x . L^2x) \& \neg(L^2x . L^3x) \& \neg(L^3x \cdot L^1x)\}$.

3. Работа машины X^* (функции $j(i,\varepsilon)$, $\delta(i,\varepsilon)$, $\mu(i,\varepsilon)$ определяются реальной программой работы X^*):

$$\bigwedge_{i,\varepsilon} \{ Tx . Ny . Kxy \cdot q^i x \cdot (Sxy)^\varepsilon \supset$$
$$\supset q^{j(i,\varepsilon)} x' . (Sx'y)^{\delta(i,\varepsilon)} . L^{\mu(i,\varepsilon)} x' \} .$$

4. Определение H :

$$Ty.Nx \supset (Hyx \sim Kyx').$$

5. Новая обозреваемая ячейка:

5.1. $Tx.Ny.L^1x \supset (Kx'y \sim Hxy)$,

5.2. $Tx.Ny.L^2x \supset (Hx'y \sim Kxy)$,

5.3. $Tx.Ny.L^3x \supset (Kx'y \sim Kxy)$.

6. Символ в необозреваемой ячейке не меняется:

$$Tx.Ny.\neg Kxy \supset (Sx'y \sim Sxy).$$

7. Головка не сходит с ленты и не запрыгивает на ленту:

7.1. $Tx.Ny.\mathcal{O}y \supset \neg(Kxy.L^1x)$,

7.2. $Tx.Ny.\mathcal{O}y.L^2x \supset \neg Kx'y$.

8. В начальный момент – начальное состояние:

$$Tx \cdot \mathcal{O}x \supset q^0x.$$

9. В начальный момент обозревается нулевая ячейка и лишь она:

9.1. $Ty.Nx.\mathcal{O}y \cdot \mathcal{O}x \supset Kyx$,

9.2. $Ty.Nx.\mathcal{O}y \supset \neg Kyx'$.

10. В начальный момент на ленте записано некоторое число:

11. Величина его определяется предикатом A :

$$Ty.Nx.\mathcal{O}y.Ax \supset Syx.\neg Syx'.$$

§ 5.

1. Положим $\varphi(n) = \forall xy \{(\neg Nx \supset \mathfrak{A}_1).\mathfrak{B}.$

$$.\neg q^1x.\neg Sxx.\neg Sx'x.\neg Kxx.\neg Hxx\} \&$$

$$\& \exists z_0 \ldots z_{n+1} \{\mathfrak{A}_2^n.Tz_n.\mathcal{O}z_n.Nz_{n+1}.\mathcal{O}z_{n+1}\}.$$

По поводу $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ см. пункты 2 и 3 § 2, $\mathfrak{B}$ выписана в предыдущем параграфе.

2. ТЕОРЕМА 8. Какова бы ни была формула α, $\alpha \longleftrightarrow \varphi([\alpha])$.

Доказательство этой теоремы составляет содержание параграфов 6, 7, 8.

§ 6.

Ниже, говоря о X^*, подразумеваем, что она начинает с $n=[\alpha]$. Пусть $\mathfrak{M}$ - модель для α. Построим следующую модель $\mathfrak{N}$:

I. Основное множество модели $\mathfrak{N}$ состоит из пар (i,κ), где $0\leq i\leq n+1$, $\kappa=0,1,\ldots$.

2. $(i,\kappa)'=(i,\kappa+1)$.

3. $O(i,\kappa)\sim\kappa=0$.

4. $T(i,\kappa)\sim i=n$.

5. $N(i,\kappa)\sim i=n+1$.

6. Если $i\neq n$ или $j\neq i+1$, то

$$S(i,\kappa)(j,\ell)\sim(j=i+1\,\&\,\kappa=\ell\leq i).$$

7. $S(n,\kappa)(n+1,\ell)$ равносильно тому, что в κ - тый момент в ℓ -той ячейке стоит единичка.

8. Если $i\neq n$ или $j\neq n+1$, то

$$K(i,\kappa)(j,\ell)\sim(j=i+1\,\&\,\kappa=\ell+1\leq i).$$

9. $K(n,\kappa)(n+1,\ell)$ равносильно тому, что в κ -тый момент X^* обозревает ℓ -тую ячейку.

I0. $A(i,\kappa)\sim(i=\kappa\leq n\vee i=n+1)$.

II. $q^i(\ell,\kappa)$ равносильно тому, что $\ell=n$ и в κ-тый момент X^* находится в состоянии q^i.

I2. $H(i,\kappa)(j,\ell)\sim K(i,\kappa)(j,\ell+1)$.

I3. $L^1(i,\kappa)$ равносильно тому, что $i=n$ и в момент κ X^* получает команду движения влево; аналогично определяются $L^2(i,\kappa)$ и $L^3(i,\kappa)$.

Непосредственно проверяется, что в $\mathfrak{N}$ имеет место $\varphi(n)$. Роль $z_0,\ldots,z_{n+1}$ играют элементы $(0\,0),(1,0),\ldots,(n+1,0)$.

§ 7.

Пусть $\mathfrak{M}$ - конечная модель для α. В этом случае X^* в некоторый момент времени t_1 попадает в стоп-состояние q^2. Положим $t=max\,(t_1,[\alpha]+1)$.

Посторoим модель $\mathfrak{N}$:

I. Основное множество $\mathfrak{N}$ состоит из пар (i,κ), где $\quad 0 \leqslant i \leqslant [\alpha]+1, \quad 0 \leqslant k \leqslant t.$

2. $$(i,k)' = \begin{cases} (i,k+1) & \text{при } k<t \\ (i,t) & \text{при } k=t. \end{cases}$$

3. В остальном в точности так, как в предыдущем параграфе.

$\mathfrak{N}$ есть модель для $\varphi([\alpha])$.

§ 8.

Пусть $\mathfrak{N}_1$ - модель для $\varphi([\alpha])$ и $z_0,\dots,z_{[\alpha]+1}$ - соответствующие элементы $\mathfrak{N}_1$. Наименьшая подмодель $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{N}_1$, содержащая $z_0,\dots,z_{[\alpha]+1}$ и замкнутая относительно $'$, тоже будет моделью $\varphi([\alpha])$. Подмодель из $\mathfrak{N}$, состоящая из элементов вида z_i^{ℓ} с $0 \leqslant i \leqslant [\alpha]$, есть модель для $\chi([\alpha])$ (см. § 2). Согласно лемме I имеет место $A(z_{[\alpha]}^{([\alpha])})$. $z_{[\alpha]}^{\ell}$ будем интерпретировать, как ℓ -тый момент времени, а $z_{[\alpha]+1}^{\ell}$ - как ℓ -тую ячейку. Видим, что в $\mathfrak{N}$ закодирована работа X^* , начинающей с $[\alpha]$. Причем, имеет место $\forall x(\neg q'x)$, т.е. согласно § I α выполнима.

Если $\varphi([\alpha])$ имеет конечную модель, то, очевидно, X^* зацикливается, начиная работать с $[\alpha]$. Из § I нетрудно извлечь , что в этом случае α должна иметь конечные модели.

Теорема 8 доказана. Из неё непосредственно следует

СЛЕДСТВИЕ. Формулы вида $\varphi(n)$ составляют класс сведения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Идея записи работы машины Тьюринга формулами вида $\forall\exists\forall$ взята из [I].

§ 9.

$\varphi(n)$ содержит три двуместных предиката. В следующем параграфе мы строим формулы $\psi(n)$, содержащие один двуместный предикат F . Будет показано, что $\varphi(n) \longleftrightarrow \psi(n)$.

Предварительно покажем, как мы собираемся кодировать три двуместных предиката одним. Вместо Fxy мы пишем просто xy .

Пусть $\mathfrak{M}$ - модель для $\varphi(n)$. Будем считать каждый $a \in \mathfrak{M}$ девяткой новых элементов: $a^0,\dots,a^8$. На этих новых элементах определим предикат F :

I. $Sab \sim \bigwedge_{j=0}^{8} (b^j a^0 \cdot a^j b^2 \cdot b^j a^3) \cdot b^1 a^8,$

2. $Kab \sim \bigwedge_{j=0}^{8} (a^j b^1 \cdot b^j a^4 \cdot a^j b^6) \cdot a^3 b^8 \cdot b^7 a^8,$

3. $Hab \sim \bigwedge_{j=0}^{8} (b^j a^5 \cdot a^j b^7) \cdot a^4 b^8 \cdot b^6 a^8$,

4. $\neg a^0 b^8$, $\neg a^2 b^8$, $\neg a^5 b^8$, $\neg a^8 b^8$.

§ 10. Построение $\psi(n)$.

Нелогические константы $\psi(n)$ будут состоять из F , символа одноместной функции $'$, символов одноместных предикатов из $\varphi(n)$ и следующих новых символов одноместных предикатов : $0, 1, \ldots, 8$.

$\psi(n)$ будет иметь вид $\forall xy\, \mathcal{L} \,\&\, \exists z_0 \ldots z_{n+1}\, \vartheta$.

σ есть

$$[0z_0 \ldots 0z_{n+1} \cdot Az_0 \cdot \bigwedge_{i=0}^{n-1} \neg Az_{i+1} \cdot \bigwedge_{i=0}^{n-1} z_{i+1} z_i \cdot$$

$$\bigwedge_{j \neq i+1} \neg z_j z_i \cdot Tz_n \cdot \sigma z_n \cdot Nz_{n+1} \cdot \sigma z_{n+1}] .$$

$\mathcal{L}$ есть конъюнкция следующих формул.

1. $\bigvee_{i=0}^{8} i(x)$, $\bigwedge_{0 \leqslant i < j \leqslant 8} \neg (i(x) \cdot j(x))$,

$\bigwedge_{i=0}^{7} [i(x) \supset (i+1)(x')]$, $8(x) \supset 0(x')$.

2. $\bigwedge_{h} \{ \bigwedge_{i<8} (h(x) \sim h(x')) \}$,

здесь h пробегает все символы одноместных предикатов из $\varphi(n)$.

3. Формулы, относящиеся к S, K, H :

3.1. $\bigwedge_{i,j=0}^{7} i(x) \cdot j(y) \supset (xy \sim x'y)$.

3.2. Формулы, относящиеся к S :

3.2.1. $0(x) \cdot 2(y) \supset (yx \sim xy)$,

3.2.2. $3(x) \cdot 2(y) \supset (yx \sim xy)$,

3.2.3. $1(x) \cdot 8(y) \supset (xy \sim yx')$.

3.3. Формулы, относящиеся к K :

3.3.1. $4(x) \cdot 1(y) \supset (yx \sim xy)$,

3.3.2. $4(x) \cdot 6(y) \supset (yx \sim xy)$,

3.3.3. $3(x) \cdot 8(y) \supset (xy \sim yx')$, 3.3.4. $6(x).8(y) \supset (yx \sim x'y)$.

3.4. Формулы, относящиеся к H :

3.4.I. $5(x).7(y) \supset (yx \sim xy)$,

3.4.2. $4(x).8(y) \supset (xy \sim yx')$,

3.4.3. $6(x).8(y) \supset (xy \sim yx')$.

4. Формула, относящаяся к $\neg Nx \supset \mathfrak{A}_1$

$$\neg Nx \supset \mathfrak{A}_1^* ,$$

где $\mathfrak{A}_1^*$ есть конъюнкция следующих формул:

4.I. $\neg A(x).8(y).\neg A(y).1(y) \supset (yx \supset x'y)$,

4.2. $8(x).3(y).yx \supset \neg Ax' \cdot x'y$,

4.3. $8(x).A(y).O(y).xy \supset Ax'$.

5. Формулы, относящиеся к $\mathfrak{L}$:

5.I. и 5.2. совпадают с формулами пунктов I и 2 § 4.

5.3. $\bigwedge\limits_{i,\varepsilon} \{8(x).1(y).Tx.Ny.q^i x.xy.(yx)^{\varepsilon} \supset \supset q^{j(i,\varepsilon)}x' \cdot (yx')^{\delta(i,\varepsilon)} . L^{\mu(i,\varepsilon)}x' \}$.

5.4. $8(x).4(y).Ty.Nx \supset (yx \sim x'y)$.

5.5.I. $8(x).6(y).Tx.Ny.L^1 x \supset (x'y \sim yx)$.

5.5.2. $8(x).7(y).Tx.Ny.L^2 x \supset (x'y \sim yx)$.

5.5.3. $8(x).1(y).Tx.Ny.L^3 x \supset (x'y \sim xy)$.

5.6. $8(x).1(y).Tx.Ny.\neg xy \supset (yx' \sim yx)$.

5.7.I. $Tx.Ny.1(y).O(y) \supset \neg (xy \cdot L^1 x)$.

5.7.2. $Tx.Ny.8(x).1(y).O(y).L^2(x) \supset \neg x'y$.

5.8. $Tx.O(x) \supset q^0(x)$.

5.9.I. $Ty.Nx.Oy.Ox.4(y) \supset xy$.

5.9.2. $Ty.Nx.Oy.8(x).4(y) \supset \neg x'y$.

5.I0. $8(x).O(y).Ty.Nx.O(y) \cdot \neg xy \supset \neg x'y$.

5.II. $8(x).O(y).Ty.Oy.Ax \supset xy \cdot \neg x'y$.

6. $\neg q^1 x$.

7. $\neg xx, \neg xx', \neg x'x$.

8. $\{[0(x) \vee 2(x) \vee 5(x) \vee 8(x)].\, 8(y)\} \supset \neg xy$.

§ II.

ТЕОРЕМА 9. $\varphi(n) \longleftrightarrow \psi(n)$
(определение $\varphi(n)$ см. в § 5, $\psi(n)$ – в § I0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. Пусть $\mathfrak{M}$ – модель для $\varphi(n)$. Каждый $a \in \mathfrak{M}$ будем считать девяткой новых элементов: $a^0, \ldots, a^8$, из которых и построим модель $\mathfrak{N}$ для $\psi(n)$. F определяется в соответствии с формулами § 9. Остальные нелогические константы определим так:

I.I. $0(a^0), \ldots, 8(a^8)$,

I.2. $h(a) \sim h(a^0) \sim \ldots \sim h(a^8)$, где h – произвольный из сигнатуры $\varphi(n)$.

I.3. $(a^0)' = a^1, \ldots, (a^7)' = a^8$, $(a^8)' = (a')^0$.

Непосредственная проверка убеждает нас в том, что $\mathfrak{N}$ – модель для $\psi(n)$.

2. Пусть $\mathfrak{N}_1$ – модель для $\psi(n)$ и $z_0, \ldots, z_{n+1}$ – элементы $\mathfrak{N}_1$, удовлетворяющие ϑ. Подмодель $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{N}_1$, состоящая из элементов вида $z_i^{(k)}$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1;\ k = 0, 1, \ldots)$, тоже есть модель для $\psi(n)$. Пусть $M = \{x \mid x \in \mathfrak{N}.\, 0(x)\}$. Одноместные предикаты из $\varphi(n)$ уже определены на M. S, K и H определим в соответствии с формулами § 9. Одноместную функцию определим естественным образом. Получим модель для $\varphi(n)$.

§ I2.

Резюмируем основной результат этой главы в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА I0. Найдется такое число r, что класс формул без символа равенства вида:

$$\forall xy\,\{\mathfrak{A}(F, f_1, \ldots, f_r;\ x, x', y).\, \neg xx.\, \neg xx'.\, \neg x'x\}\ \&$$

$$\&\, \exists z_1 \ldots z_n\, \mathfrak{B}(F, f_1, \ldots, f_r;\ z_1, \ldots, z_n),$$

где $n = 0, 1, \ldots$ есть класс сведения.

Глава 3

§ I.

I. ТЕОРЕМА II. Пусть $\sigma=\{F\}$, $\Pi=\{\forall\exists\forall\exists^n | n=0,1,\ldots\}$. $\Phi(\Pi,\sigma)$ есть класс сведения.

2. В соответствии с леммой из введения достаточно доказать, что множество формул (без символа равенства) вида:

$$\forall xy\exists z_1\ldots z_n\mathfrak{A}(F;x,x',y,z_1,\ldots,z_n)$$

есть класс сведения. Доказательство этого утверждения и составляет содержание этой главы.

§ 2.

Нам понадобятся следующие определения (см. [2]):

I. Теория есть пара вида $<\sigma,A>$, где σ - набор нелогических констант (сигнатура теории), а A - система σ - формул (система аксиом теории).

2. Пусть $S=<\sigma,A>$. Формула теории S (S-формула) есть тоже, что и σ -формула. $И(S)$ есть совокупность S -формул, выводимых из A.

3. Теории $S=<\sigma,A>$ и $T=<\tau,B>$ равны, если $И(S)=И(T)$ и $\sigma=\tau$.

4. Пусть $S=<\sigma,A>$. Модель сигнатуры σ (σ -модель) называется моделью теории S (S -моделью) если на ней истинны все формулы из A.

5. (Сравните с пунктом 4 введения). Пусть α - формула теории S, β - формула теории T. Посредством $(\alpha,S)\rightarrow(\beta,T)$ будем записывать тот факт, что:

5.I. если α выполнима на некоторой S -модели, то и β выполнима на некоторой T -модели и

5.2. если α выполнима на некоторой конечной S -модели, то и β выполнима на некоторой конечной T -модели.

Вместо " $(\alpha,S)\rightarrow(\beta,T)$ и $(\beta,T)\rightarrow(\alpha,S)$ " будем писать " $(\alpha,S)\leftrightarrow(\beta,T)$ ".

6. Пусть Φ - класс формул теории S, Ψ - класс формул теории T. Будем говорить, что пара (Φ,S) сводится к паре (Ψ,T) и писать $(\Phi,S)\rightarrow(\Psi,T)$, если существует такая машина Тьюринга Y, которая начиная с гёделева номера произвольной $\alpha\in\Phi$, закончит работу через конечное число шагов и при этом на ленте будет записан гёделев номер некоторой $\beta\in\Psi$; при-

чем, $(\alpha, S) \longrightarrow (\beta, T)$.

7. Пару (Ψ, T) будем называть парой сведения, если к ней сводится такая пара (Φ, S), что S есть УИП, т.е. S содержит все возможные константы нелогические (см. п.I введения) и не содержит аксиом, а Φ - совокупность всех S - формул.

Ясно, что если (Φ_1, S_1) - пара сведения и

$$(\Phi_1, S_1) \longrightarrow (\Phi_2, S_2),$$

то и (Φ_2, S_2) - пара сведения. Кроме того, если T не имеет аксиом, то (Ψ, T) есть пара сведения тогда и только тогда, когда Ψ есть класс сведения.

§ 3. Схема доказательства теоремы II

I. Пусть

I.I. $\tau_z = \{F, g_0, \ldots, g_{z-1}\}$,

I.2. $T_z = \langle \tau_z, '; \neg xx, \neg xx', \neg x'x \rangle$,

I.3. Ψ_z есть совокупность формул вида

$$\forall xy\, \mathfrak{A}(\tau_z; x, x', y) \,\&\, \exists z_1 \ldots z_n\, \mathfrak{B}(\tau_z; z_1, \ldots, z_n).$$

Из теоремы I0 вытекает

ЛЕММА I. Существует такое z, что (Ψ_z, T_z) есть пара сведения.

2. В параграфе 4 мы построим ряд теорий: $S_0, S_0', S_1, S_1', \ldots$. Причём, $S_0 = \langle F, '; \emptyset \rangle$. Затем в каждой S_ρ выберем множество формул Φ_ρ. Причем, Φ_0 будет множество формул вида:

$$\forall xy \exists z_1 \ldots z_n\, \mathfrak{A}(F; x, x', y, z_1, \ldots, z_n).$$

3. В § 5 докажем, что при $\rho = 0, 1, \ldots$

$$(\Phi_\rho, S_\rho') \longrightarrow (\Phi_\rho, S_\rho).$$

В § 6 докажем, что при $\rho = 0, 1, \ldots$

$$(\Phi_{\rho+1}, S_{\rho+1}) \longrightarrow (\Phi_\rho, S_\rho').$$

4. В § 7 через ряд промежуточных теорий сведем (Ψ_z, T_z) к $(\Phi_{2(z+2)}, S_{2(z+2)})$ при $z = 0, 1, \ldots$.

Все это вместе и составит доказательство теоремы II.

§ 4.

I. Положим: (пусть при $i = 0, 1, 2, 3$ $\quad i = i_1 + 2i_2$) :

I.1. $\sigma_0=\{F\}$, $\sigma_1=\{F, f_0^0, f_0^1, f_0^2, f_0^3\}$,

$\sigma_p=\{F, f_j^i \mid i=0,1,2;\ 0\leq j<p\}$ при $p\geq 2$.

I.2. Φ_p есть совокупность формул вида :

$$\forall xy\exists z_1\dots z_n\,\alpha(\sigma_p; x,x',y,z_1,\dots,z_n).$$

I.3.I. $A_0=\phi$.

I.3.2. $A_0'=\{\neg xx.yy\supset(xx'\sim xy).(x'x\sim yx), \exists z.zz., \exists z.\neg zz.\}$.

I.3.3. $A_1=\{\neg xx, f_0^i x\sim (xx')^{i_1}.(x'x)^{i_2}\quad (i=0,1,2,3)\}$.

I.3.4. $A_1'=\{A_1, \neg f_0^3 x.f_0^3 \overset{y}{\cancel{x}}\supset\bigwedge_{i=0}^{2}[f_0^i x'\sim(xy)^{i_1}.(yx)^{i_2}],$

$\exists z.f_0^3 z, \exists z.\neg f_0^3 z\}$. $\neg f_0^3(x)$

I.3.5. $A_2=\{\neg xx, \bigwedge_{i=0}^{2}[f_0^i x\sim(xx')^{i_1}.(x'x)^{i_2}], \bigvee_{i=0}^{2} f_0^i x, f_1^i x\sim f_0^i x'\}$.

I.3.6. Положим в качестве сокращения при $p\geq 2$

$$X_p x=f_0^2 x.\bigwedge_{0<q<p-1} f_q^1 x.f_{p-1}^2 x,$$

$$Y_p x=\bigwedge_{0\leq q<p-2} f_q^1 x.f_{p-2}^2 x.f_p^1 x.$$

I.3.7. При $p\geq 2$

$$A_p'=\{A_p,\neg X_p x.X_p y\supset\bigwedge_{i=0}^{2}[f_{p-1}^i x'\sim(xy)^{i_1}.(yx)^{i_2}],\exists z.X_p z.\}.$$

I.3.8. При $p\geq 2$

$$A_{p+1}=\{A_p,\neg X_p x,\bigwedge_i[f_p^i x\sim f_{p-1}^i x'],\exists z.Y_p z\}.$$

I.4. $S_p=\langle\sigma_p,{}';A_p\rangle$, $S_p'=\langle\sigma_p,{}';A_p'\rangle$.

2. Таким образом, при $p\geq 3$

$$A_p=\{\neg xx, \bigwedge_{i=0}^{\overset{3}{2}}[f_0^i x\sim(xx')^{i_1}.(x'x)^{i_2}], \bigvee_{i=0}^{2} f_0^i x, \neg f_0^3(x),$$

$$\bigwedge_{i,q}[f_{q+1}^i x\sim f_q^i x'], \bigwedge_{0\leq j<k\leq p-2}\neg[f_j^2 x.\bigwedge_{j<l<k} f_l^1 x.f_k^2 x],$$

$$\exists z[[\bigwedge_{0\leq q<p-3}(f_q^1 z)].f_{p-3}^2 z.f_{p-1}^1 z]\}.$$

§ 5.

ЛЕММА 2. (Φ_ρ, S'_ρ) сводится к (Φ_ρ, S_ρ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \Phi_\rho$.

A'_ρ получается из A_ρ добавлением формулы ε_ρ вида $\forall xy \mathcal{L}(\sigma_\rho; x, x', y)$ и формулы δ_ρ вида $\exists z\, \vartheta(\sigma_\rho; z)$ или $\exists z_1, z_2\, \vartheta(\sigma_\rho; z_1, z_2)$. Поэтому

$$(\alpha, S'_\rho) \longrightarrow (\alpha \,\&\, \varepsilon_\rho \,\&\, \delta_\rho, S_\rho).$$

Но $\alpha \,\&\, \varepsilon_\rho \,\&\, \delta_\rho$ эквивалентна формуле из Φ_ρ . Достаточно привести её надлежащим образом к пренексному виду.

§ 6.

ЛЕММА 3. $(\Phi_1, S_1) \longrightarrow (\Phi_0, S'_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha = \forall xy \exists z_1 \ldots z_n \mathfrak{A}(\sigma_1; x, x', y, z_1, \ldots, z_n).$$

Возьмем переменную w , отличную от $x, y, z_1, \ldots, z_n$ и через $\mathcal{B}$ обозначим формулу, которая получается из $\mathfrak{A}$ заменой подформул вида $f_0^i v$ на $(vw)^{i_1} . (wv)^{i_2}$. Положим

$$\beta = \forall xy \exists z_1 \ldots z_n w \left[\neg xx . \neg yy \supset \neg x'x' . \neg z_1 z_1 \ldots \neg z_n z_n . ww . \mathcal{B}\right].$$

Очевидно, $\beta \in \Phi_0$. Покажем, что $(\alpha, S_1) \longrightarrow (\beta, S'_0)$.

Пусть $\mathfrak{M}$-S_1- модель для α . Возьмем какой-нибудь $w \,\bar{\in}\, \mathfrak{M}$ и положим $w' = w$, ww,

$$v \in \mathfrak{M} . f_0^i v \supset (vw)^{i_1} . (wv)^{i_2} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Получим модель для β , которая есть S'_0 -модель.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}$-S'_0 -модель для β . Положим

$$M = \{ v \mid v \in \mathfrak{N} . \neg vv \}.$$

M замкнуто относительно $'$. Положим для всякого $v \in M$

$$f_0^i v \sim (vv')^{i_1} \cdot (v'v)^{i_2} .$$

Получим S_1 - модель $\mathfrak{M}$. Докажем, что в ней имеет место α . Пусть $x, y \in \mathfrak{M}$. В соответствии с β найдутся такие

$$z_1, \ldots, z_n \in M \text{ и } w \in |\mathfrak{N}| \setminus M,$$

которые удовлетворяют β . Но согласно A'_0 $(vw)^{i_1} . (wv)^{i_2}$ эквивалентно $(vv')^{i_1} . (v'v)^{i_2}$. Последнее эквивалентно $f_0^i v$, т.е. имеет место $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 4. $(\Phi_2, S_2) \longrightarrow (\Phi_1, S'_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha = \forall xy \exists z_1 \dots z_n \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_2; x, x', y, z_1, \dots, z_n).$$

Через $\mathfrak{B}$ обозначим формулу, которая получается из $\mathfrak{A}$ заменой подформулы вида $f_1^i v$ на $(vw)^{i_1}.(wv)^{i_2}$. Положим

$$\beta = \forall xy \exists z_1 \dots z_n w\{\neg f_0^3 x . \neg f_0^3 y \supset$$
$$\supset \neg f_0^3 x' . \neg f_0^3 z_1 . \dots . \neg f_0^3 z_n . f_0^3 w . \mathfrak{B}\}.$$

Пусть $\mathfrak{M} - S_2$ - модель для α. Возьмем некоторые $w, w_1 \bar{\in} \mathfrak{M}$ и положим: $f_0^i(w) \leftrightarrow f_0^i(w_1) \leftrightarrow i = 3$

$$\neg ww,\ \neg w_1 w_1,\ ww_1,\ w_1 w,\ w' = w_1,\ w_1' = w,$$

$$v \in \mathfrak{M} . f_1^i v \supset (vw)^{i_1}.(wv)^{i_2}.(vw_1)^{i_1}.(w_1 v)^{i_2}\ (i = 0,1,2).$$

Получим модель для β, которая есть S_1' - модель.
Обратно, пусть $\mathfrak{N}$ S_1'-модель для β. Положим

$$M = \{v \mid v \in \mathfrak{N} . \neg f_0^3 v)\}.$$

M замкнуто относительно $'$. Положим для всякого $v \in M$ $f_0^i v' \supset f_1^i v$ $(i = 0,1,2)$. Получим S_2 -модель $\mathfrak{M}$. Проверим α. Пусть $x, y \in \mathfrak{M}$. Согласно β найдутся

$$z_1, \dots, z_n \in M \text{ и } w \in |\mathfrak{N}| \setminus M,$$

которые удовлетворяют $\mathfrak{B}$. Но $(vw)^{i_1}.(wv)^{i_2} \sim$ (согласно A_1') $f_0^i v' \sim$ (по построению) $f_1^i v$. Заменим в $\mathfrak{B}$ $(vw)^{i_1}.(wv)^{i_2}$ на $f_1^i v$. Получим $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 5. $(\Phi_{p+1}, S_{p+1}) \to (\Phi_p, S_p')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha = \forall xy \exists z_1 \dots z_n \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_{p_{+1}}; x, x', y, z_1, \dots, z_n).$$

Через $\mathfrak{B}$ обозначим формулу, которая получается из $\mathfrak{A}$ заменой $f_p^i v$ на $(vw)^{i_1}.(wv)^{i_2}$.

а) Пусть $\mathfrak{M}$ S_{p+1}- модель для α, $a \in \mathfrak{M}$ и $Y_p a$. Возьмем $w \bar{\in} \mathfrak{M}$ и положим: $f_0^i(w) \leftrightarrow i = 2$

$\neg wa . aw$

$$\neg ww,\ w' = a,\ \cancel{wa . \neg aw},\ f_0^2 w,\ f_{q+1}^i w \sim f_q^i a.$$

В качестве следствия получим $X_p w$. Положим, далее:

$$v \in \mathfrak{M} . f_p^i v \supset (vw)^{i_1}.(wv)^{i_2}. \qquad a w . \neg w a$$

В частности, так как $f_p^1 a$, то мы должны положить ~~$\neg aw . wa$~~,

$\beta = \forall xy \exists z_1 \dots z_n w (\neg X_p x . \neg X_y \to \neg X_p x' . \neg X_p z_1 \dots \neg X_p z_n .$
$. X_p w . \mathfrak{B})$

что уже есть.

Получаем модель для β , которая есть S'_ρ - модель.

б) Пусть теперь $\mathfrak{N}$ S'_ρ - модель для β . В $\mathfrak{N}$ есть элементы v такие, что $\neg X_\rho v$ (например, если $X_\rho x$,то $\neg X_\rho x'$). Положим $M=\{v \mid v\in\mathfrak{N}.\neg X_\rho v\}$. На M определены уже

$$F,',f_0^i,\dots,f_{\rho-1}^i .$$

Положим дополнительно

$$f_\rho^i x \sim f_{\rho-1}^i x'.$$

Получим модель для α , которая есть $S_{\rho+1}$ -модель.

§ 7.

I. Положим в качестве сокращения при $\rho\geqslant 3$

$$Z_\rho x = \bigvee_{q=0}^{\rho-1} f_q^2 x . \bigwedge_{q=0}^{\rho-1} \neg f_q^0 x .$$

Пусть,далее, B_ρ получается из A_ρ добавлением

$$\exists z . Z_\rho z ., \exists z . \neg Z_\rho z ., Z_\rho x \sim Z_\rho x'.$$

И пусть $\mathcal{U}_\rho = \langle \mathfrak{S}_\rho ,' ; B_\rho \rangle$.

ЛЕММА 6. П р и $\rho\geqslant 3$

$$(\Phi_\rho, \mathcal{U}_\rho) \to (\Phi_\rho, S_\rho).$$

Доказательство аналогично тому, которое было проведено в § 5. Отметим, что аксиома

$$\exists z\Big[\Big(\bigwedge_{0\leqslant q<\rho-3} f_q^1 z\Big). f_{\rho-3}^2 z . f_{\rho-1}^1 z\Big]$$

следует из других аксиом B_ρ . Далее будем считать, что её нет в B_ρ .

2. Положим, что $\overline{\Phi}_\rho$ есть совокупность формул вида :

$$\forall xy\, \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_\rho; x, x', y)\ \&\ \exists z_1 \dots z_n \mathfrak{B}(\mathfrak{S}_\rho; z_1,\dots,z_n).$$

Очевидна

ЛЕММА 7. $(\overline{\Phi}_\rho, \mathcal{U}_\rho) \to (\Phi_\rho, \mathcal{U}_\rho)$.

3. Положим, что C_ρ получается из B_ρ заменой $\exists z . Z_\rho z$ на $\forall z . \neg Z_\rho z$. и что $V_\rho = \langle \mathfrak{S}_\rho ,' ; C_\rho \rangle$.

ЛЕММА 8. При $\rho\geqslant 3$

$$(\overline{\Phi}_\rho, V_\rho) \to (\overline{\Phi}_\rho, \mathcal{U}_\rho).$$

of all
exist. [illegible]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha = \forall xy\mathfrak{A}(\sigma_p; x, x', y) \& \exists z_1 \ldots z_n \mathfrak{B}(\sigma_p; z_1, \ldots, z_n).$$

Положим

$$\beta = \forall xy\, [\neg Z_p x . \neg Z_p y \supset \mathfrak{A}] \&$$

$$\& \exists z_1 \ldots z_n [\neg Z_p z_1 . \ldots . \neg Z_p z_n . \mathfrak{B}].$$

Проверим, что $(\alpha, V_p) \longrightarrow (\beta, U_p)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ V_p -модель для α И пусть элементы $a_0, \ldots, a_{p-1}$ не принадлежат $\mathfrak{M}$. Положим

$$(a_0 a_1)^{\overset{0}{\lambda}} . (a_1 a_0)^{\overset{1}{a}}, \; (a_i a_{i+1})^{\overset{1}{a}} . (a_{i+1} a_i)^{\overset{0}{\lambda}} \;\; (1 \leq i \leq p-2),$$

$$a_i' = a_{i+1}, \; a_{p-1}' = a_0, \; (a_{p-1} a_0)^{\overset{1}{a}} . (a_0 a_{p-1})^{\overset{0}{\lambda}}.$$

Во всех остальных случаях $\neg a_i a_j$. Если $x \in \mathfrak{M}$, положим $\neg a_i x . \neg x a_i$. Доопределим на

$$N = |\mathfrak{M}| \cup \{a_0, \ldots, a_{p-1}\}$$

одноместные предикаты: $f_0^2 a_0, f_0^1 a_1, \ldots$ Получим U_p - модель для β .

Обратное очевидно.

4. Приведем здесь для удобства C_p .

$$C_p = \{\neg xx, \bigwedge_{i=0}^{2} [f_0^i x \sim (xx')^{i_1} . (x'x)^{i_2}], \; \bigvee_{i=0}^{2} f_0^i x,$$

$$\bigwedge_{i,q} (f_{q+1}^i x \sim f_q^i x'), \; \neg Z_p x, \; \bigwedge_{0 < j < k \leq p-2} \neg (f_j^2 x . \bigwedge_{j < \ell < k} f_\ell^1 x . f_k^2 x)\}.$$

ЛЕММА 9. $(\Psi_\tau, T_\tau) \longrightarrow (\bar{\Phi}_p, V_p)$ при $p = 2(\tau+2)$, $\tau = 0, 1, \ldots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha = \forall xy\mathfrak{A}(\tau_\tau; x, x', y) \&$$

$$\& \exists z_1 \ldots z_n \mathfrak{B}(\tau_\tau; z_1, \ldots, z_n).$$

Положим

$$\beta = \{[f_1^2 x \supset f_0^o x].$$
$$.[\neg f_1^2 x . f_1^2 y \supset (xy \sim x'y).(yx \sim yx')].$$
$$.[f_1^2 x . f_1^2 y \supset \mathfrak{A}^*]\} \& \exists z_1 \ldots z_n \mathfrak{B}^*,$$

где $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{B}^*$ получаются из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ заменой подформул вида $g_i u$, $\neg g_i u$ при $u \neq x'$ на $f_{2+i}^1 u$, $f_{2+i}^o u$ и подформул вида $g_i x'$, $\neg g_i x'$

на

$$f_{3+i+\tau}^1 x', \; f_{3+i+\tau}^o x'.$$

Покажем сначала, что $(\alpha, T_\tau) \rightarrow (\beta, V_\rho)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ T_τ - модель для α. Будем считать каждый $a \in \mathfrak{M}$ последовательностью из $(\tau+3)$ элементов: $a_0, \ldots, a_{\tau+2}$. Из этих новых элементов будем строить V_ρ -модель $\mathfrak{N}$. Положим:

4.I. $(a_i)' = a_{i+1}$ при $i \neq \tau+2$,

4.2. $(a_{\tau+2})' = (a')_o$,

4.3. $f_0^o(a_0)$, $f_0^2(a_1)$, $f_1^2(a_0)$,

4.4. $g_i(a) \sim f_0^1(a_{2+i})$,

4.5. $\neg g_i(a) \sim f_0^o(a_{2+i})$,

4.6. $\neg a_i a_i$, $a_o b_o \sim ab$,

4.7. $a_1 b_o \sim a_2 b_o \sim \ldots \sim a_{\tau+2} b_o \sim (a')_o b_o$,

4.8. $f_0^i(a_j) \supset (a_j (a_j)')^{i_1} . ((a_j)' a_j)^{i_2}$,

$f_{q+1}^i(a_j) \sim f_q^i((a_j)')$.

$\mathfrak{N}$ есть модель для β .

Покажем, что и $(\beta, V_\rho) \rightarrow (\alpha, T_\tau)$.

Пусть $\mathfrak{N}$ V_ρ - модель для β , $M = \{x / x \in \mathfrak{N} . f_1^2 x\}$.

F уже определен на M . Пользуясь 4.4 и 4.5 определяем $g_o, \ldots, g_{\tau-1}$. Определяем естественным образом одноместную функцию. Получаем T_τ -модель для α .

Теорема II непосредственно следует из лемм I-9.

Глава 4. Все остальные случаи

§ I.

ТЕОРЕМА I2. Пусть $\Pi = \{\forall\exists\forall\}$,

$$\sigma = \{F_0, F_1, \dots, f_0, f_1, \dots\}.$$

$\Phi(\Pi,\sigma)$ есть класс сведения.

Изящное доказательство этой теоремы приведено в [I5] (см. особенно стр. 39-42). Там же приведено принадлежащее Kahr'у сведение к одному двуместному предикату по выполнимости. Согласно [9] Hao Wang и A S Kahr проделали также сведение к одному двуместному предикату и по конечной выполнимости. К сожалению, в доступных работах этих авторов нет явно теоремы I3, формулируемой ниже. Автор собирался привести в этой работе доказательство теоремы I3, исходя из теоремы I2 при помощи некоторого усиления метода, которым была доказана теорема 9. В момент, когда рукопись была уже почти готова к печати, автором была получена на отзыв диссертация В.Ф.Костырко, содержащая доказательства всех результатов этой главы. (За небольшим исключением, не имеющим значения - в диссертации и в [8] пропущен случай $\exists^n\forall^3\exists$). Часть диссертации Костырко, содержащая теорему I3, будет опубликована в "Кибернетике" ([II]). Туда мы и отсылаем читателя по поводу теоремы I3. [I0] мы используем ещё один раз - в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА I3. Класс формул вида

$$\forall x \exists u \forall y \mathfrak{A}(F, f_1, \dots, f_n; x, x', y),$$

не содержащих подформул

$$xx, x'x', yy, xx', x'x, yx',$$

есть класс сведения.

§ 2.

ТЕОРЕМА I4. Пусть $\sigma = \{F, f_1, f_2, \dots\}$. Класс формул вида

$$\forall x \exists y \mathfrak{B}_1(\sigma; x, y) \,\&\, \forall z_1 z_2 z_3 \mathfrak{B}_2(\sigma; z_1, z_2, z_3)$$

есть класс сведения.

Приводимое доказательство принадлежит A S Kahr'у и взято из [I0].

Пусть

$$\alpha = \forall x \exists u \forall y \mathfrak{A}(F, f_1, \dots, f_n; x, u, y)$$

не содержит подформул xx, $x'x'$, yy, xx', $x'x$, yx'.

Положим

$$\mathcal{B}_1 = xy.(f_1x \supset f_2y).(f_2x \supset f_3y).(f_3x \supset f_1y).$$

Через $\mathcal{B}_2$ обозначим конъюнкцию следующих формул:

а) $f_2z_1.f_3z_2.f_1z_3.z_1z_2 \supset [(z_1z_3 \sim z_3z_2).\bigwedge_{i=4}^{n}(f_iz_1 \sim f_iz_2)]$,

б) $f_3z_1.f_1z_2.f_1z_3.z_1z_2 \supset [(z_3z_1 \sim z_2z_3).\bigwedge_{i=4}^{n}(f_iz_1 \sim f_iz_2)]$,

в) $f_1z_1.f_2z_2.f_1z_3.z_1z_2 \supset \mathfrak{A}(z_1,z_2,z_3)$.

Положим $\beta = \forall x \exists y \mathcal{B}_1 \ \& \ \forall z_1z_2z_3 \mathcal{B}_2$.

Осталось доказать, что $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – модель для α и $'$ — соответствующая функция Сколема. Каждый $a \in \mathfrak{M}$ будем считать тройкой новых элементов: a^1, a^2, a^3. Из этих новых элементов будем строить модель для β. Положим:

I. $a^1a^2, a^2a^3, a^3(a')^1, a^1b^1 \sim ab$.

2. $a^2b^1 \sim b^1a^3 \sim (a')^1b^1, f_1(a^1), f_2(a^2), f_3(a^3)$.

3. В остальных случаях $\neg a^ib^j$.

4. $f_i(a) \sim f_i(a^1) \sim f_i(a^2) \sim f_i(a^3)$ $(i=4,\dots,n)$.

Получим модель для β.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}$ – модель для β и $'$ – сколемова функция для $\forall x \exists y \mathcal{B}_1$. Положим $M = \{x \mid x \in \mathfrak{N}.f_1(x)\}$. $F, f_4, \dots, f_n$ уже определены на M. Проверим α. Пусть $x, y \in M$. В качестве u возьмем x'''. В силу в) имеет место $\mathfrak{A}(x,x',y)$. Но в силу а) и б) $x'y \sim yx'' \sim x'''y$. И потому имеет место $\mathfrak{A}(x,x''',y)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Pi = \{\forall^3\exists\}, \sigma = \{F, f_1, f_2, \dots\}$. $\Phi(\Pi,\sigma)$ есть класс сведения.

ТЕОРЕМА I5. Пусть

$$\Pi = \{\exists^n\forall^3\exists \mid n = 0,1,\dots\},\ \sigma = \{F\}.$$

$\Phi(\Pi,\sigma)$ есть класс сведения.

Эта теорема легко получается из предыдущего следствия.

§ 3.

ТЕОРЕМА 16. Класс формул сигнатуры $\{F\}$ вида:

$$\forall x \exists y \mathcal{A}_1(x,y) \& \forall z_1 \ldots z_n \mathcal{A}_2(z_1, \ldots, z_n)$$

есть класс сведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha = \forall x \exists u \forall y \mathfrak{A}(xy, yx, x'y, f_2, \ldots, f_{p-1}; x, u, y).$$

Через $\mathcal{A}_1$ обозначим формулу $\forall x \exists y (xy . \neg yx)$. Через $\mathcal{A}_2$ обозначим конъюнкцию следующих формул:

а) $x_0 x_1 . \neg x_1 x_0 . x_0 x_2 . \neg x_2 x_0 \supset (x_1 x_3 \sim x_2 x_3).(x_3 x_1 \sim x_3 x_2)$,

б) $\left[\bigwedge\limits_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1} . \neg x_{i+1} x_i\right] \supset$
$\supset \left[\left(\bigvee\limits_{i=0}^{p} x_i x_i\right).\left(\bigwedge\limits_{0 \le i < j \le p} \neg (x_i x_i . x_j x_j)\right)\right]$,

в) $\left\{\left[\bigwedge\limits_{i=0}^{p-1} (x_i x_{i+1} . \neg x_{i+1} x_i) . x_0 x_0\right] \right.\&$

$\& \left[\bigwedge\limits_{i=0}^{p-1} (u_i u_{i+1} . \neg u_{i+1} u_i) . u_0 u_0\right] \&$

$\& \left[\bigwedge\limits_{i=0}^{p-1} (y_i y_{i+1} . \neg y_{i+1} y_i) . y_0 y_0\right] \&$

$\left. \& \left[x_p u_0 . \neg u_0 x_p\right]\right\} \supset \mathfrak{A}^*$,

где $\mathfrak{A}^*$ получается из $\mathfrak{A}$ следующими заменами:

в.1. xy на $x_1 y_p \cdot y_p x_1$,

в.2. yx на $y_1 x_p \cdot x_p y_1$,

в.3. uy на $u_1 y_p \cdot y_p u_1$,

в.4. $f_i x$ на $x_0 x_i \cdot x_i x_0$,

в.5. $f_i u$ на $u_0 u_i \cdot u_i u_0$,

в.6. $f_i y$ на $y_0 y_i \cdot y_i y_0$.

Положим

$$\gamma = \forall x \exists y \mathcal{A}_1 \& \forall x_0 \ldots x_p u_0 \ldots u_p y_0 \ldots y_p \mathcal{A}_2 .$$

Докажем, что $\alpha \rightarrow \gamma$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – модель для α и $'$ – соответствующая сколемова функция. Будем каждый $a \in \mathfrak{M}$ считать последовательностью из $(p+1)$ элемента: $a_0, \ldots, a_p$. На этих новых элементах определим F :

I. $a_i a_{i+1} . \neg a_{i+1} a_i \qquad (i < p)$.

2. $a_p (a')_0 . \neg (a')_0 a_p$.

3. $f_i(a) \sim a_0 a_i . a_i a_0 \qquad (2 \leq i \leq p-1)$.

4. $\neg f_i(a) \sim \neg a_0 a_i . \neg a_i a_0 \qquad (2 \leq i \leq p-1)$.

5. $a_0 a_0 . \neg a_1 a_1 . \neg a_2 a_2 . \ldots . \neg a_p a_p$.

6. $ab \sim a_1 b_p . b_p a_1$. .

7. $\neg ab \sim \neg a_1 b_p . \neg b_p a_1$.

8. В остальном как угодно.

Получим модель для β .

Нетрудно проверить также, что $\beta \rightarrow \alpha$. Мы уже неоднократно делали аналогичные вещи. Здесь опускаем.

СЛЕДСТВИЕ I. П у с т ь $\Pi = \{\forall^n \exists / n = 0, 1, \ldots\}$, $\sigma = \{F\}$. $\Phi(\Pi, \sigma)$ е с т ь к л а с с с в е д е н и я.

СЛЕДСТВИЕ 2. П у с т ь $\Pi = \{\forall \exists \forall^n / n = 0, 1, \ldots\}$, $\sigma = \{F\}$. $\Phi(\Pi, \sigma)$ е с т ь к л а с с с в е д е н и я.

§ 4.

ТЕОРЕМА I7. П у с т ь $\Pi = \{\forall^3 \exists^n / n = 0, 1, \ldots\}$, $\sigma = \{F\}$. $\Phi(\Pi, \sigma)$ е с т ь к л а с с с в е д е н и я.

Доказана в [2].

ТЕОРЕМА I8. П у с т ь $\sigma = \{F\}$,

$$\Pi_1 = \{\exists^n \forall \exists \forall \ / \ n = 0, 1, \ldots\},$$

$$\Pi_2 = \{\forall \exists^n \forall \ / \ n = 0, 1, \ldots\}.$$

$\Phi(\Pi_1, \sigma)$ и $\Phi(\Pi_2, \sigma)$ я в л я ю т с я к л а с с а м и с в е д е н и я.

Доказана в [8] .

Глава 5. Одно обобщение

§ I.

Теоремы I0, I4, I5 наталкивают нас на некоторые обобщения. Мы рассмотрим одно из них.

Через $\Phi(\Pi_1,\sigma) \& \Phi(\Pi_2,\sigma) \& \ldots \& \Phi(\Pi_n,\sigma)$ обозначим класс формул вида $\alpha_1 \& \alpha_2 \& \ldots \& \alpha_n$, где $\alpha_i \in \Phi(\Pi_i,\sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Другие логические связки рассматривать не имеет смысла:

а) $\neg\Phi(\Pi,\sigma)$ есть $\Phi(\Pi^*,\sigma)$ при соответствующем Π^* и

б) выполнимость формул из $\Phi(\Pi_1,\sigma) \vee \Phi(\Pi_2,\sigma)$ сводится отдельно к выполнимости формул из $\Phi(\Pi_1,\sigma)$ и $\Phi(\Pi_2,\sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно было бы рассматривать

$$\Phi(\Pi_1,\sigma_1) \& \ldots \& \Phi(\Pi_n,\sigma_n),$$

но мы этого делать не будем.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Будем рассматривать лишь те Π, которые замкнуты относительно подслов. Это не нарушает общности.

§ 2.

Рассмотрим в этом параграфе бесконечную сигнатуру σ. Из результатов главы I и теорем I3, I4 нетрудно извлечь следующую теорему.

ТЕОРЕМА I9. а) Либо $\Phi(\Pi_1,\sigma) \& \ldots \& \Phi(\Pi_n,\sigma)$ разрешим либо он есть класс сведения. То же относится и к

$$\Phi^*(\Pi_1,\sigma) \& \ldots \& \Phi^*(\Pi_n,\sigma).$$

б) $\Phi(\Pi_1,\sigma) \& \ldots \& \Phi(\Pi_n,\sigma)$ есть класс сведения тогда и только тогда, когда

$$\Phi^*(\Pi_1,\sigma) \& \ldots \& \Phi^*(\Pi_n,\sigma)$$

есть класс сведения.

в) Если $\Phi^*(\Pi_1,\sigma) \& \ldots \& \Phi^*(\Pi_n,\sigma)$ разрешим, то выполнимость для его формул совпадает с конечной выполнимостью.

г) $\Phi(\Pi_1,\sigma) \& \ldots \& \Phi(\Pi_n,\sigma)$ есть класс сведения тогда и только тогда, когда σ содержит хотя бы один предикат с числом мест не менее двух и имеет место хотя бы одна из следующих двух возможностей:

г.I. При некотором i

$\Phi(\Pi_i,\sigma)$ есть класс сведения.
г.2. При некоторых $i \neq j$

$$\forall\exists \in \Pi_i\,,\ \forall^3 \in \Pi_j\,.$$

§ 3.

I. В этом параграфе мы рассматриваем лишь конечные сигнатуры. Если σ содержит только одноместные предикаты, то выполнимость формул из $\Phi^*(\Pi_1,\sigma)\,\&\ldots\&\,\Phi^*(\Pi_n,\sigma)=\Phi^*$ совпадает с конечной выполнимостью и Φ^* разрешим. Поэтому далее будем считать , что σ содержит не только одноместные предикаты.

2. Обратимся к теореме 10. В качестве подходящего τ в ней можно взять число $[\log_2 m^*]+11$, где m^* - число состояний универсальной машины Тьюринга. Достаточно подсчитать лишь число одноместных предикатов в (см. § I0 главы 2) и учесть, что некоторые из этих предикатов образуют "дизъюнктные группы" (см.по этому поводу п.I § I0 главы 2).

3. ТЕОРЕМА 20. Пусть $\sigma=\{F,f_i\,|\,1\le i\le[\log_2 m^*]+13\}$. Класс σ -формул вида $\forall x\exists u\,\mathcal{B}_1(x,u)\,\&$

$$\&\,\forall xyz\,\mathcal{B}_2(x,y,z)\,\&\,\exists z_1\ldots z_n\,\mathcal{B}_3(z_1,\ldots,z_n)$$

есть класс сведения.

Эта теорема выводится из теоремы I0 аналогично тому, как теорема I4 выводится из теоремы I3. После всего проделанного это есть несложное упражнение.

Число $[\log_2 m^*]+13$ будем в дальнейшем обозначать τ_0 .

СЛЕДСТВИЕ. Классы сигнатуры

$$\sigma=\{F,f_1,\ldots,f_{\tau_0}\}$$

видов

$$\forall^3\exists\,\&\,\exists^n,\ \forall\exists^n\&\,\forall^3,$$

$$\forall\exists\,\&\,\exists^n\forall^3,\ \exists^n\forall\exists\,\&\,\forall^3$$

есть классы сведения.

4. Из результатов главы I, теорем I0, I6, 20 и следствия теоремы 20 без труда выводится теорема 2I.

ТЕОРЕМА 2I. Пусть σ содержит все.о не менее r_0+1 предикатов. Тогда

а) Либо $\Phi(\Pi_1,\sigma)\&\ldots\&\Phi(\Pi_n,\sigma)$ разрешим, либо он есть класс сведения. То же относится и к

$$\Phi^*(\Pi_1,\sigma)\&\ldots\&\Phi^*(\Pi_n,\sigma).$$

б) $\Phi(\Pi_1,\sigma)\&\ldots\&\Phi(\Pi_n,\sigma)$ разрешим в том и только том случае, когда разрешим

$$\Phi^*(\Pi_1,\sigma)\&\ldots\&\Phi^*(\Pi_n,\sigma).$$

в) Если $\Phi^*=\Phi^*(\Pi_1,\sigma)\&\ldots\&\Phi^*(\Pi_n,\sigma)$ разрешим, то за исключением конечного числа формул выполнимость для формул из Φ^* совпадает с конечной выполнимостью.

г) $\Phi(\Pi_1,\sigma)\&\ldots\&\Phi(\Pi_n,\sigma)$ есть класс сведения тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одна из следующих возможностей:

г.I. При некотором i $\Phi(\Pi_i,\sigma)$ есть класс сведения.

г.2. При некоторых $i\neq j$

$$\forall\exists\in\Pi_i,\quad \{\forall^n \mid n=1,2,\ldots\}\in\Pi_j.$$

г.3. При некоторых $i\neq j$

$$\forall\exists\forall\in\Pi_i,\quad \{\exists^n \mid n=1,2,\ldots\}\in\Pi_j.$$

г.4. При некоторых попарно различных i,j,k

$$\forall\exists\in\Pi_i,\ \forall^3\in\Pi_j,\ \{\exists^n \mid n=1,2,\ldots\}\in\Pi_k.$$

г.5. При некоторых $i\neq j$

$$\forall^3\exists\in\Pi_i,\quad \{\exists^n \mid n=1,2,\ldots\}\in\Pi_j.$$

г.6. При некоторых $i\neq j$

$$\forall^3\in\Pi_i,\quad \{\forall\exists^n \mid n=1,2,\ldots\}\in\Pi_j.$$

г.7. При некоторых $i\neq j$

$$\forall\exists\in\Pi_i,\quad \{\exists^n\forall^3 \mid n=1,2,\ldots\}\in\Pi_j.$$

г.8. При некоторых $i \neq j$

$$\forall^3 \in \Pi_i , \quad \{\exists^n \forall \exists \mid n=1,2,\ldots\} \in \Pi_j .$$

§ 4.

Имея ввиду теорему II, мы в теореме IО стремились к конъюнктам $\neg xx$, $\neg xx'$, $\neg x'x$. Это стоило нам двух одноместных предикатов – T и N. Учитывая эту и некоторые другие возможности, слагаемое I3 из числа τ_0 теоремы 2I можно уменьшить. Тем не менее неясно, можно ли довести τ_0 до нуля. И, в первую очередь, является ли выполнимость формул вида $\forall\exists\forall \,\&\, \exists^n$ при $\sigma = \{P\}$ эффективно распознаваемым свойством или нет.

Поступила в редакцию
IО.П.I966 г.

Литература

I. Büchi J.R., Turing Machines and the Entscheidungsproblem Math. 148, №3, (1962), 201-213.

2. Ю.Ш.Гуревич. Экзистенциальная интерпретация.- Алгебра и логика. Семинар. I965, т.4, вып.4, стр. 7I-84.

3. Ю.Ш.Гуревич. К проблеме разрешения для узкого исчисления предикатов, ДАН СССР (в печати).

4. Ю.Ш.Гуревич. Проблема разрешения для узкого исчисления предикатов, ДАН СССР (в печати).

5. Hödel K. Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik, 40, (1933), 433-443.

6. Kahr A.S., Moor E.T., Hao Wang. Entscheidungsproblem reduced to the case, Proc.Math.Acad.Sci., USA, 48, №3, (1962), 365-377.

7. Kalmar L. Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbare Allzeichen enthalten., Math.Ann.,1C , (1933), 466-484.

8. В.Ф.Костырко. Класс сведения $\forall\exists^n\forall$. - Алгебра и логика. Семинар, I964, т.3, вып.5-6, стр.45-55.

9. В.Ф.Костырко. К проблеме разрешимости для случая Аккермана. - Сиб. мат. ж., I965, т.6, № 2, стр.342-364.

I0. В.Ф.Костырко. К проблеме разрешимости в узком исчислении предикатов, Киев (I965), кандидатская диссертация.

II. В.Ф.Костырко. О классе сведения $\forall\exists\forall$.-Кибернетика ,I966, №I, стр.I7-22.

I2. Schütte K. Untersuchungen zum Entxheidungsproblem der mathematischen Logik., Math.Ann.,109,(1934),

I3. Schütte K. Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. Math.Ann.,(1934),161-194.

I4. Suranyi J. Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems. Budapest, 1959.

I5. Wang Hao. Dominoes and the $\forall\exists\forall$ case of the decision problem, Proc.Sympos.Math.Theory Automata (New York, 1962), Polytechnic Press of Polytechnic Institute of the Brooklin,Brooklin, N.Y., (1963), 23-55.

I6. А.Чёрч. Введение в математическую логику, Москва , I960.

I7. Ehrenfeucht A. An application of games to the completenes problem for formaliezed theories. Fund. Math. XLIX, 1, (1960), 129-141.