АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АЛГЕБРА И ЛОГИКА

СЕМИНАР

Зосеньке этот странный подарок.
Без претензий на внимание к нему.

15.12.66

Юрий

ТОМ 5
ВЫПУСК 5

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 5 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

ПРОБЛЕМА РАВЕНСТВА СЛОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЛУГРУПП

Ю.Ш.Гуревич

В работе доказывается неразрешимость узкой проблемы равенства слов (см. § I) для следующих классов полугрупп и ассоциативных колец: периодические, конечные, ниль и нильпотентные , и др.

§ I. Универсальная теория и проблема равенства слов

I. Пусть K - класс универсальных алгебр с системой операций Ω . Универсальная теория $T(\forall, K)$ класса K есть совокупность всех истинных на каждой алгебре из K формул без свободных переменных вида $\forall x_1 \dots x_n \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ построена при помощи логических связок из формул вида $t=s$, где t и s - Ω -термы.

2. Сформулируем проблему равенства слов для K . Существует ли алгоритм, который среди формул вида

$$\forall x_1 \dots x_n (t_1=s_1 \& \dots \& t_m=s_m \to t=s)$$

распознает формулы из $T(\forall, K)$.

Очевидно, разрешимость $T(\forall, K)$ влечет разрешимость проблемы равенства слов для K . Если K замкнут относительно прямого произведения двух алгебр, то верно и обратное (см. [I]).

3. Будем говорить, что для класса K неразрешима узкая проблема равенства слов, если существуют такие фиксированные

$$t_1, s_1, \dots, t_m, s_m, s,$$

что нет алгоритма, распознающего среди формул вида

$$\forall x_1 \dots x_n (t_1 = s_1 \& \dots \& t_m = s_m \to t = s)$$

формулы из $T(\forall, K)$.

§ 2. Машина Минского

I. Пусть f есть фиксированная частично-рекурсивная функция, область определенности D которой нерекурсивна. Такие функции существуют (см. [2]).

2. M будет в дальнейшем обозначать фиксированную 2-ленточную машину Минского, которая для любого натурального n перерабатывает 2^n в $2^{f(n)}$, если $n \in D$, и работает безостановочно, не переходя в заключительное состояние q_0, если $n \bar{\in} D$. Такие машины также существуют (см. [2]). (Мы используем терминологию, относящуюся к машинам Минского, из [2]. Некоторые пояснения следуют ниже).

3. M представляет собою машину Тьюринга с одной головкой и двумя бесконечными в одну сторону (вправо) лентами. Состояния ленточных клеток не изменяются. Самые левые (нулевые по номеру) клетки имеют состояние I, все другие - 0. Внутренние состояния M пусть $q_0, q_1, \dots, q_m$. Команды M имеют вид:

$$q_i \varepsilon \delta \to q_j T_\alpha T_\beta,$$

где $i = 1, \dots, m$; $\varepsilon, \delta = 0, 1$; $j = 0, \dots, m$; $\alpha, \beta = -1, 0, 1$.
Расшифровка: если M в состоянии q_i воспринимает ε (то есть видит клетку с состоянием ε) на первой ленте и δ - на второй, то она переходит в состояние q_j и сдвигает первую ленту на α клеток влево, вторую - на β.

Мы будем считать, что функции $j(i,\varepsilon,\delta), \alpha(i,\varepsilon,\delta), \beta(i,\varepsilon,\delta)$ определены тогда и только тогда, когда $i > 0$. (Ибо всегда можно добавить команду $q_i \varepsilon \delta \to q_i T_0 T_0$, если в программе M нет команды с посылкой $q_i \varepsilon \delta$ и если $i > 0$. M не перестанет от этого удовлетворять требованию п.2).

4. Пусть M находится в состоянии q_i и воспринимает ξ-тую клетку первой ленты и η-ую клетку - второй. Скажем, что M находится в конфигурации (i, ξ, η). Пусть Σ - конфигурация M при $t = 0$ (начальная). Конфигурацию M в момент t обозначим

$$(i(\Sigma, t), \xi(\Sigma, t), \eta(\Sigma, t)),$$

так что $(i(\Sigma, 0), \xi(\Sigma, 0), \eta(\Sigma, 0)) = \Sigma$
Букву Σ будем часто опускать.

Из предыдущего пункта следует, что

$$i(t+1)=j(i(t),\overline{sg}\,\xi(t),\overline{sg}\,\eta(t)),$$
$$\xi(t+1)=\xi(t)+\alpha(i(t),\overline{sg}\,\xi(t),\overline{sg}\,\eta(t)),$$
$$\eta(t+1)=\eta(t)+\beta(i(t),\overline{sg}\,\xi(t),\overline{sg}\,\eta(t)),$$

где

$$\overline{sg}\,n=\begin{cases}0, & n>0;\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

5. В пункте 2 утверждается следующее. Пусть $\Sigma=(1,2^n,0)$. Если $n\in D$, то при некотором t: $i(t)=0$, $\xi(t)=2^{f(n)}$, $\eta(t)=0$. $i(t)=0$ означает, что M остановилась. Если же $n\bar{\in} D$, то $\forall t\,(i(t)\neq 0)$, то есть M никогда не остановится.

Через E обозначим совокупность тех n, что если

$\Sigma=(1,2^n,0)$, то $\forall t\,(i(t)\neq 0)$

и $\xi(t)\cdot\eta(t)$ бесконечное число раз принимает значение 0, то есть M бесконечное число раз воспринимает, по крайней мере, одну из двух самых левых клеток.

6. ЛЕММА I. Пусть $\Sigma=(1,2^n,0)$. $n\bar{\in} D\cup E$ равносильно следующему условию (F):

$$\exists i\,t_0t_1\,[t_0<t_1\ \&\ i(t_0)=i(t_1)=i\ \&$$
$$\&\ \xi(t_1)\geqslant\xi(t_0)\ \&\ \eta(t_1)\geqslant\eta(t_0)\ \&$$
$$\&\ \forall t\,(t_0\leqslant t\leqslant t_1\longrightarrow\xi(t)\cdot\eta(t)\neq 0)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n\bar{\in} D\cup E$ и τ - такой момент, что

$$t\geqslant\tau\longrightarrow\xi(t)\cdot\eta(t)\neq 0.$$

Ряд $i(\tau)$, $i(\tau+1)$, $i(\tau+2),\ldots$, начиная с некоторого места, является чисто периодическим. Поэтому найдутся такие t_0 и t_1, что $\tau\leqslant t_0<t_1$ и $i(t_0)=i(t_1)$. Очевидно,

$$t_0\leqslant t\leqslant t_1\longrightarrow\xi(t)\cdot\eta(t)\neq 0.$$

Кроме того, при всяком t

$$\xi(t_1+t)-\xi(t_0+t)=\xi(t_1)-\xi(t_0).$$

Пусть $\xi=\xi(t_1)-\xi(t_0),\ T=t_1-t_0$. Получаем , в частности,

$$\xi(t_0+(\kappa+1)T)=\xi(t_1+\kappa T)=$$
$$=\xi(t_0+\kappa T)+\xi=\dots=\xi(t_0)+(\kappa+1)\xi.$$

Отсюда $\xi\geqslant 0$. Аналогично $\eta(t_1)-\eta(t_0)\geqslant 0$.

Доказательство того, что (F) влечет $n\bar{\in}D\cup E$, мы опустим.

7. ЛЕММА 2. D и E рекурсивно неотделимы.

Доказательство от противного. Пусть C рекурсивно и $D\subseteq C$ и $C\cap E=\varnothing$. Докажем, что в таком случае D рекурсивно. Берем некоторый n . Если $n\bar{\in}C$, то $n\bar{\in}D$. Пусть $n\in C$. Запускаем M с $\Sigma=(1,2^n,0)$. Через конечное число тактов работы машины мы установим либо остановку, либо выполнение условия (F). В первом из этих случаев $-\ n\in D$, во втором $-\ n\bar{\in}D$.

§ 3. Формула $\varphi(n)$

Положим, $\varphi(n)=$

$$=\forall O h q_0\dots q_m a \mathfrak{b}\mathfrak{b}' e c(\varphi^*\to h\mathfrak{b}a^{2^n}q_1\mathfrak{b}h=O),$$

где φ^* есть конъюнкция следующих формул (при этом $i=1,\dots,m$):

I.1. $\mathfrak{b}q_i\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^2a^{\alpha(i,1,1)}q_{j(i,1,1)}a^{\beta(i,1,1)}\mathfrak{b}^2c$;

I.2. $\mathfrak{b}q_ia=\mathfrak{b}^2a^{\alpha(i,1,0)}q_{j(i,1,0)}a^{1+\beta(i,1,0)}c$;

I.3. $aq_i\mathfrak{b}=a^{1+\alpha(i,0,1)}q_{j(i,0,1)}a^{\beta(i,0,1)}\mathfrak{b}^2c$;

I.4. $aq_ia=a^{1+\alpha(i,0,0)}q_{j(i,0,0)}a^{1+\beta(i,0,0)}c$;

2. $\mathfrak{b}e=e\mathfrak{b}=\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}'\mathfrak{b}=e$;

3. $ca=ac,\ c\mathfrak{b}=\mathfrak{b}c,\ ch=hc$;

4. $hea=aeh=heq_i=q_ieh=O$,

$Oh=hO=Oq_0=\dots=q_mO=Oa=aO=O\mathfrak{b}=\mathfrak{b}O=Oc=cO=O$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предполагается следующее определение:

$$x^0y=yx^0=y,\ \ yx^0z=yz.$$

Здесь x^0 – нулевая степень x .

§ 4. Случай $n \in E$

ЛЕММА 3. Пусть $n \in E$ и Γ - периодическая полугруппа. Тогда $\Gamma \vdash \varphi(n)$, то есть $\varphi(n)$ истинна на Γ.

Доказательство леммы 3 составляет содержание этого параграфа.

I. Пусть $O, h, q_0, \dots, q_m, a, \mathscr{E}, \mathscr{E}', e, c$ - такие элементы Γ, что имеет место φ^*.

Из пункта 2 § 3 вытекает, что $\mathscr{E}$ порождает в Γ конечную циклическую подгруппу с единицей e. Порядок этой подгруппы обозначим T.

2. ЛЕММА 4. Пусть начальная конфигурация машины M есть $\Sigma=(1,2^n,0)$ и пусть в моменты $0,1,\dots,t-1$ машина M $x(t)$ раз воспринимала самую левую клетку первой ленты и $y(t)$ раз - самую левую клетку второй ленты. Тогда в Γ

$$h\mathscr{E}a^{2^n}q_1\mathscr{E}h = h\mathscr{E}^{1+x(t)}a^{\xi(t)}q_{i(t)}a^{\eta(t)}\mathscr{E}^{1+y(t)}hc^t.$$

Доказательство индукцией по t. При $t=0$ лемма очевидна. Пусть лемма доказана уже для t, докажем её для $t+1$. Ограничимся, впрочем, случаем $\xi(t)=0$, $\eta(t)\neq 0$. Другие три случая разбираются аналогично.

В нашем случае $x(t+1)=x(t)+1$, $y(t+1)=y(t)$,

$$i(t+1)=j(i(t),1,0),\ \xi(t+1)=\alpha(i(t),1,0),\ \eta(t+1)=\eta(t)+\beta(i(t),1,0).$$

По предположению индукции

$$h\mathscr{E}a^{2^n}q_1\mathscr{E}h = h\mathscr{E}^{1+x(t)}q_{i(t)}a^{\eta(t)}\mathscr{E}^{1+y(t)}hc^t.$$

Последнее, согласно пункту I.2 и п. 2 из § 3, равно

$$h\mathscr{E}^{1+x(t)+1}a^{\alpha(i(t),1,0)}q_{j(i(t),1,0)}a^{\eta(t)+\beta(i(t),1,0)}\mathscr{E}^{1+y(t)}hc^{t+1} =$$

$$= h\mathscr{E}^{1+x(t+1)}a^{\xi(t+1)}q_{i(t+1)}a^{\eta(t+1)}\mathscr{E}^{1+y(t+1)}hc^{t+1}.$$

Лемма 4 доказана.

3. Так как $n \in E$, то найдется такое t, что, по крайней мере, одно из определенных в лемме 4 чисел $x(t)$ или $y(t)$ будет равно $T-1$ (при $\Sigma=(1,2^n,0)$). Тогда

$$h\mathfrak{g}a^{2^n}q_1\mathfrak{g}h = h\mathfrak{g}^{1+x(t)}a^{\xi(t)}q_{i(t)}a^{\eta(t)}\mathfrak{g}^{1+y(t)}hc^t = 0$$

согласно пункту 4 из § 3.

Лемма 3 доказана.

§ 5. Несколько определений

I. $x \mid y \xleftrightarrow{df} \exists u v (y = x \vee y = ux \vee y = xv \vee y = uxv),$

$$x \nmid y \xleftrightarrow{df} \neg (x \mid y).$$

2. Пусть Γ – полугруппа, $W \subseteq \Gamma$. Положим

$$\mathcal{J} = \{x : \forall y \in W (x \nmid y)\}.$$

$\mathcal{J}$ есть идеал. Положим, $\theta xy \leftrightarrow [x = y \vee (x \in \mathcal{J} \;\&\; y \in \mathcal{J})]$.
θ есть конгруенция. Γ/θ будем обозначать (Γ, W). Элементы из $\Gamma \setminus \mathcal{J}$ будем отождествлять с соответствующими элементами (Γ, W).

3. В дальнейшем под прямым произведением полугрупп A и B мы будем понимать полугруппу $A \times B$, которая состоит из A, B и множества пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Умножение, как обычно.

§ 6. Случай $n \in D$

ЛЕММА 5. Пусть $n \in D$. Существует такая конечная полугруппа Γ, что

$$\Gamma \vdash \neg \varphi(n).$$

Доказательство леммы 5 составляет содержание этого параграфа.

I. Пусть $\Sigma = (1, 2^n, 0)$. На протяжении этого параграфа, говоря о машине M, будем подразумевать, что она начинает работу именно в этой конфигурации. Пусть τ – номер такта остановки M, то есть $i(\tau) = 0$. Положим, $T = 2\tau + 2^n + 1$.

2. Пусть G – циклическая группа порядка T с образующим $\mathfrak{g}$ и e – единица из G.

3. Пусть F – свободная полугруппа с образующими $h, q_0, \dots, q_m, a$ и C – свободная полугруппа с образующим c. Положим, $H = (G * F) \times C$.

Слова из H вида $h\wp^{k}a^{\xi}q_i a^{\eta}\wp^{\ell}hc^{t}$, где $k,\ell\geqslant 1$, $\xi,\eta,t\geqslant 0$, будем называть словами Поста.

4. Пусть A - одно из слов, выписанных в левых частях равенств пунктов I.I - I.4 из § 3, B - соответствующее слово из правой части. Прямым элементарным преобразованием слова P из H назовем замену в P подслова A на подслово B, обратным - замену подслова B на подслово A. Положим, на H $\theta(P,Q)$, если существует цепочка $P=P_0, P_1,\ldots,P_\nu=Q$, где $\nu\geqslant 0$, такая, что каждый следующий её член получается из предыдущего прямым или обратным элементарным преобразованием. Очевидно, θ есть конгруенция на H. Отметим, что к слову Поста может быть применено не более одного прямого элементарного преобразования и что слово Поста может быть эквивалентно в смысле θ лишь слову Поста.

5. Пусть в течение $t=0,1,\ldots,\tau-1$ машина M k_0-1 раз воспринимала самую левую клетку первой ленты и ℓ_0-1 раз- самую левую клетку второй ленты. Рассуждение, аналогичное рассуждению из доказательства леммы 4, доказывает, что в H имеет место $\theta(R_0,R_1)$, где

$$R_0=h\wp a^{2^n}q_1\wp h,\quad R_1=h\wp^{k_0}a^{2^{f(n)}}q_0\wp^{\ell_0}hc^{\tau}$$

Положим,

$$W_0=\{P:\theta(P,R_0)\},$$

$$W=\{h\wp^{k}a^{\xi}q_i a^{\eta}\wp^{\ell}hc^{t}:\quad 0\leqslant i\leqslant m,$$

$$1\leqslant k,\ell<T,\quad 0\leqslant\xi,\eta\leqslant T,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau\}.$$

6. ЛЕММА 6. $W_0\subseteq W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P\in W_0$. Тогда $\theta(P,R_1)$. Пусть

$$P=P_0,P_1,\ldots,P_\nu=R_1$$

такая цепочка, что каждый следующий её член получается из предыдущего прямым или обратным элементарным преобразованием и ν — наименьшее из возможных. Подобно тому, как в оригинальном доказательстве Поста неразрешимости узкой проблемы равенства слов для класса всех полугрупп (см., например, [2]), доказывается, что слово $P_{\mu+1}$ получается из P_μ прямым элементарным преобразованием при $\mu=0,1,\ldots,\nu-1$.

При каждом применении прямого элементарного преобразования степень c, входящая в слово, возрастает в точности на I. Поэтому $\nu \leqslant \tau$. Наблюдая теперь за тем, как меняются степени $\mathscr{E}$ и a при прямом элементарном преобразовании, мы и заключаем, что $P \in W$.

Лемма 6 доказана.

6. Нетрудно видеть теперь, что в конечной полугруппе $(H/\Theta, W/\Theta)$ (см. пункт 2 из § 5) имеет место $\neg \varphi(n)$.

Лемма 5 доказана.

§ 7.

ТЕОРЕМА I. Узкая проблема равенства слов неразрешима для классов периодических и конечных полугрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K класс периодических или класс конечных полугрупп, а через C - совокупность тех n , что $\varphi(n) \in T(\forall, K)$ (см. § I). Если бы узкая проблема равенства слов была разрешима для класса K , то C была бы рекурсивна. Но из леммы 3 следует, что $E \subseteq C$, а из леммы 5, что $D \cap C = \varnothing$ Поэтому, согласно лемме 2, C не может быть рекурсивной.

Теорема I доказана.

§ 8. Формула $\psi(n)$

Положим, $\psi(n) =$

$$= \forall \sigma h q_0 \dots q_m a c(\psi^* \to h a^{2^n} q_1 h = \sigma),$$

где ψ^* есть конъюнкция следующих формул (при этом $i=1,\dots,m$):

I.I. $h q_i h = h a^{\alpha(i,1,1)} q_{j(i,1,1)} a^{\beta(i,1,1)} h c$;

I.2. $h q_i a = h a^{\alpha(i,1,0)} q_{j(i,1,0)} a^{1+\beta(i,1,0)} c$;

I.3. $a q_i h = a^{1+\alpha(i,0,1)} q_{j(i,0,1)} a^{\beta(i,0,1)} h c$;

I.4. $a q_i a = a^{1+\alpha(i,0,0)} q_{j(i,0,0)} a^{1+\beta(i,0,0)} c$;

2. $ac = ca$, $hc = ch$;

3. $\sigma\sigma = \sigma$.

§ 9. Нильпотентные полугруппы и ниль-полугруппы

I. Нильпотентность и ниль мы понимаем в кольцевом смысле:

I.I. Полугруппа Γ называется нильпотентной, если она обладает нулем и существует такое целое положительное число n, что произведение любых n элементов из Γ есть нуль.

I.2. Полугруппа Γ называется ниль-полугруппой, если она обладает нулем и существует такое целое положительное n, что n-ая степень любого элемента из Γ есть нуль.

2. ЛЕММА 7. Если $n \bar{\in} \mathcal{D}$ и Γ - ниль-полугруппа, то $\Gamma \vdash \Psi(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично тому, как в лемме 4, показывается, что если машина M начинает работу в конфигурации $\Sigma=(1,2^n,0)$ и в момент t находится в конфигурации $(i(t), \xi(t), \eta(t))$, то в Γ

$$ha^{2^n}q_1h = ha^{\xi(t)}q_{i(t)}a^{\eta(t)}hc^t,$$

если $O, h, q_0, \ldots, q_m, a, c$ - такие элементы Γ, что выполняется φ^*. Из пункта 3 предыдущего параграфа следует, что элемент O есть нуль для Γ. Так как $n \bar{\in} \mathcal{D}$, то написанное выше равенство имеет смысл при произвольном t_n. Но при достаточно большом t c^t, а вместе с ним и $ha^{2^n}q_1h$ равен O.

Лемма 7 доказана.

3. ЛЕММА 8. Пусть $n \in \mathcal{D}$. Найдется такая нильпотентная полугруппа Γ, что $\Gamma \vdash \neg\Psi(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - свободная полугруппа с образующими $h, q_0, \ldots, q_m, a$ и C - свободная полугруппа с образующими c. Положим $H = F \times C$. Дальнейшее копирует доказательство леммы 5.

4. ТЕОРЕМА 2. Узкая проблема равенства слов неразрешима для класса ниль-полугрупп и для класса нильпотентных полугрупп.

Теорема 2 вытекает из лемм 7 и 8 и нерекурсивности $\mathcal{D}$.

§ I0. Несколько замечаний

I. Добавим к пункту 2 § 3 соотношение $\mathscr{E}\mathscr{E}' = e$. Из наших рассуждений вытекает более общий результат, чем теорема I. Пусть L_1 - класс полугрупп, все циклические подгруппы которых конечны. Узкая проблема равенства слов неразрешима для всякого подкласса

класса L_1 , содержащего при каждом $r \in D$ конечную полугруппу , построенную в § 6.

2. Аналогично предыдущему. Пусть L_2 -класс ниль-полугрупп. Узкая проблема равенства слов неразрешима для всякого подкласса класса L_2 , содержащего все конечные нильпотентные полугруппы.

3. Универсальная теория класса полугрупп фиксированного класса нильпотентности, очевидно, разрешима.

4. Доказательства наших теорем подражают доказательству Поста неразрешимости узкой проблемы равенства слов для класса всех полугрупп. Основное отличие проистекает из следующего. Пост доказывает неразрешимость проблемы равенства слов для некоторой фиксированной полугруппы. В классе же, например, конечных полугрупп каждая полугруппа имеет разрешимую универсальную теорию.

§ II. К проблеме равенства слов для колец

I. Имеются в виду ассоциативные кольца.

2. Пусть Γ - полугруппа, R - кольцо с единицей. Через (Γ, R) обозначим полугрупповое кольцо полугруппы Γ над R . Элементами (Γ, R) являются конечные суммы вида $\sum \alpha_i x_i$, где $\alpha_i \in R$, $x_i \in \Gamma$. Они естественным образом складываются и умножаются . Мультипликативная полугруппа (Γ, R) содержит подполугруппу, изоморфную Γ .

3. ЛЕММА 9. П у с т ь K - к л а с с п о л у г р у п п с н е р а з р е ш и м о й у з к о й п р о б л е м о й р а в е н с т в а с л о в . П у с т ь L - к л а с с к о л е ц, м у л ь т и п л и к а т и в н ы е п о л у г р у п п ы к о т о р ы х л е ж а т в K , и т а к о й, ч т о д л я в с я к о й Γ и з K с у щ е с т в у е т т а к о е к о л ь ц о с е д и н и ц е й R , ч т о $(\Gamma, R) \in L$. Т о г д а у з к а я п р о б л е м а р а в е н с т в а с л о в н е р а з р е ш и м а д л я L .

Доказательство очевидно.

4. Из леммы 9 и предшествующих результатов вытекает неразрешимость узкой проблемы равенства слов для многих классов колец: периодических, конечных, ниль, конечных ниль-колец, нильпотентных, конечных гиперкомплексных систем над заданным конечным кольцом с единицей и т.д.

Поступила в редакцию
8.УI.1966 г.

Литература

I. Mc Kinsey J.C.C., Journ.of Symb. Logic, 8, N3 (1943),61-76.

2. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции, Москва, I965.