Алгебра и логика, 8, № 3 (1969), 284-308.

УДК 518.5

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ И ОПЕРАЦИЙ

Ю.Ш.ГУРЕВИЧ

Введение

Большая часть работ по проблеме разрешения для логики предикатов посвящена классам предваренных формул, заданным ограничениями на приставки и предикатные переменные. Исследования эти были в недавнее время во многих отношениях завершены. Соответствующие результаты приведены в начале второй главы настоящей работы с исчерпывающими подробностями.

Оказывается, часть этих результатов могла быть предсказана из чисто алгебраических соображений и имеет место в гораздо более общей ситуации и во всяком случае для любой теории первой ступени. Этому посвящена первая глава настоящей работы.

Содержание второй главы составляет обобщение упомянутых выше результатов по проблеме разрешения для логики предикатов на случай, когда допускаются переменные операции. Вторая глава может рассматриваться также как иллюстрация к первой. Более трудный из частных результатов второй главы рассмотрен нами отдельно (см. [3]).

В отличие от случая отсутствия операций добавление знака равенства в случае наличия операций существенно меняет картину. Сравните, например, настоящую работу и [4] . Во второй главе мы рассматриваем лишь формулы без знака равенства.

Выяснение отношений между результатами главы 2 и предшествующими результатами других авторов мы отложим до § 4 главы 2.

Глава 1. ТЕСНЫЕ МНОЖЕСТВА И ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ

§ 1. Тесные частично упорядоченные множества

Этот параграф имеет алгебраический характер. В частности, как это принято и удобно в нынешней общей алгебре, мы будем одним символом обозначать частично упорядоченное множество, т.е. определенную модель, и основное множество этой модели. Аналогично этому два смысла будет иметь понятие "подмножество частично упорядоченного множества". Один смысл - подмодель, другой - подмножество основного множества. Вместо "частично упорядоченное множество" будем писать для краткости "ч.у. множество". Все необходимые сведения из теории частичного порядка можно найти в § 4 главы 1 книги [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (Определение тесноты). Ч.у. множество M назовем тесным, если каждая последовательность $\{x_i\}_{i\in\omega}$ элементов M содержит возрастающую (не обязательно строго возрастающую) подпоследовательность.

Здесь ω, как обычно, обозначает упорядоченное естественным образом множество всех натуральных чисел. Очевидно, что если M есть тесное ч.у. множество, то

ТЕОРЕМА 1. M не может содержать бесконечного подмножества попарно не сравнимых элементов и

ТЕОРЕМА 2. M удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.

Обратно, если ч.у. множество удовлетворяет условиям теоремы 1 и теоремы 2, то оно является тесным. Впрочем, использовать, а потому и доказывать здесь это обратное утверждение не будем.

ЛЕММА 1. Пусть M есть тесное ч.у. множество, $X\subseteq M$ и $\forall xy(x<y\,\&\,y\in X\longrightarrow x\in X)$ и M_0 есть совокупность минимальных элементов из $M-X$. Тогда M_0 конечно и

$$M-X=\{y\in M:\exists x\in M_0\ \ (x\leq y)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечность M_0 следует из теоремы 1. Второе утверждение леммы есть непосредственное следствие из теоремы 2.

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Подмножество и гомоморфный образ тесного ч.у. множества являются тесными. Прямое произведение конечного числа тесных ч.у. множеств тесно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы очевидно. Второе утверждение достаточно доказать для случая двух прямых множителей. Пусть A и B – тесные ч.у. множества и $\{(a_i, b_i)\}_{i\in\omega}$ – последовательность элементов ч.у. множества $A\times B$. В силу тесноты A последовательность $\{a_i\}_{i\in\omega}$ содержит возрастающую подпоследовательность $\{a_i\}_{i\in X}$. Здесь X – некоторое бесконечное подмножество ω. В силу тесноты B последовательность $\{b_i\}_{i\in X}$ содержит возрастающую подпоследовательность $\{b_i\}_{i\in Y}$. Очевидно, $\{(a_i, b_i)\}_{i\in Y}$ есть возрастающая подпоследовательность последовательности $\{(a_i, b_i)\}_{i\in\omega}$.

Лемма 2 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (Определение естественного порядка слов).

Пусть a и b пробегают слова некоторого алфавита. Положим $a\leq b$, если a есть подслово (не обязательно слитное подслово) для b, т.е. если a получается из b вычеркиванием некоторого числа (0, 1,...) вхождений букв. Введенный частичный порядок будем называть естественным.

ЛЕММА 3. Пусть M есть множество всех слов конечного алфавита Q, частично упорядоченное естесвенным образом. Ч.у. множество M тесно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $n=\overline{\overline{Q}}$. При $n=0,1$ лемма очевидна. Пусть $n>1$ и для $n-1$ лемма уже доказана. Занумеруем элементы Q натуральными числами от 0 до $n-1$: $Q=\{q_0, q_1,\dots, q_{n-1}\}$. Положим далее для всякого натурального m и $\tau=0,\dots,n-1$

$$q_{m\cdot n+\tau}=q_\tau\ ,\quad d_0=\Lambda\ ,\quad d_{m+1}=d_m * q_{m+1}\ .$$

Символ "$*$" мы используем здесь и далее в этом параграфе как символ операции приписывания слов. Λ – пустое слово.

ЛЕММА 4. Если $a \in M$ и $\neg(d_m \leq a)$, то a можно представить в виде $a = a_1 * \ldots * a_m$, где каждое a_k не содержит q_k (некоторые a_k могут быть пустыми).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО индукцией по m. При $m=0$ лемма тривиальна. При $m=1$ лемма очевидна. Пусть $m>1$ и для $m-1$ лемма 4 уже доказана. Пусть b есть максимальный начальный отрезок a, не мажорирующий d_{m-1}. Тогда $a = b * a_m$ для некоторого a_m. В силу предположения индукции достаточно доказать, что a_m не содержит q_m. Можем считать при этом, что a_m отлично от Λ. В силу максимальности b слово $a_m = q_{m-1} * c$ для некоторого c и $d_{m-1} \leq b * q_{m-1}$. Если c содержит q_m, то, очевидно, $d_m \leq a = b * q_{m-1} * c$. Поэтому c, а вместе с ним и a_m не содержат q_m.

Лемма 4 доказана. Продолжим доказательство леммы 3.

Заметим, что если ℓ есть длина слова (т.е. общее число вхождений букв в слово) $a \in M$, то $a < d_{\ell \cdot n}$. Пусть теперь $\{a_i\}_{i \in \omega}$ – последовательность элементов M. Если каждое d_m меньше или равно некоторому a_i, то, очевидно, последовательность $\{a_i\}_{i\in\omega}$ имеет возрастающую подпоследовательность. Поэтому будем считать, что для некоторого m $\forall i \neg(d_m \leq a_i)$. В силу леммы 4 каждое a_i можно представить в этом случае в виде $a_i = a_{i1} * \ldots * a_{im}$, где каждое a_{ik} не содержит q_k. Рассмотрим теперь прямое произведение $M_1 \times \ldots \times M_m$, где M_k есть упорядоченное естественным образом множество всех слов алфавита $Q - \{q_k\}$. Это прямое произведение является тесным в силу предположения индукции и леммы 2. Из последовательности

$$\{(a_{i1}, \ldots, a_{im})\}_{i \in \omega}$$

элементов этого прямого произведения можно выделить возрастающую подпоследовательность $\{(a_{i1}, \ldots, a_{im})\}_{i \in X}$. Соответствующая подпоследовательность $\{a_i\}_{i \in X}$ есть возрастающая подпоследовательность последовательности $\{a_i\}_{i \in \omega}$.

Лемма 3 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. (Определение W). Посредством W обозначим совокупность всех слов алфавита $\{\forall, \exists, \forall^\infty, \exists^\infty\}$, квазиупорядоченную следующим образом: $A \leq B \pmod{W}$ равносильно тому, что A можно получить из B при помощи операций:

σ_1 – вычеркивания одного вхождения $q = \forall$ или $\exists$ и

σ_2 - замены одного вхождения q^{∞} на вхождение q^{m}, где $0 \leq m < \infty$, и

σ_3 - замены одного вхождения q^{∞} на вхождение $q^{\infty} * q^{\infty}$.

Здесь, как обычно, $q^0 = \Lambda$, $q^{m+1} = q^m * q$. Вместо $A \leq B (mod W) \& \& B \leq A (mod W)$ будем писать $A = B (mod W)$.

Напомним, что квазипорядок ρ есть рефлексивное и транзитивное отношение. Отношение $x \rho y \& y \rho x$ при этом естественно называть квазиравенством. Отождествляя в квазиупорядоченном множестве M квазиравные элементы, мы получаем некоторое ч.у. множество, которое назовем ч.у. множеством, соответствующим M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ $1'$. Квазиупорядоченное множество M будем называть тесным, если соответствующее ему ч.у. множество тесно.

ЛЕММА 5. Квазиупорядоченное множество W тесно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3, ч.у. естественным образом множество всех слов алфавита $\{\forall, \exists, \forall^{\infty}, \exists^{\infty}\}$ тесно. Отображение $A \to \{B : A = B (mod W)\}$ есть гомоморфизм этого тесного ч.у. множества на ч.у. множество, соответствующее M. В силу леммы 2 и определения $1'$, W тесно.

ЛЕММА 6. Если $A_1, \ldots, A_n$, $B \in W$ и $A = A_1 * \ldots * A_n$ и $A \leq B (mod W)$, то найдутся такие $B_i \in W$, что $B = B_1 * \ldots * B_n (mod W)$ и $A_i \leq B_i (mod W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму для $n = 2$. Далее достаточно ограничиться случаем, когда A получается из B одним применением одной операции. Лемма очевидна, если эта операция есть σ_1. Если эта операция есть σ_3, то просто $B = A (mod W)$. Пусть A получается из B одним применением операции σ_2. Лемма очевидна, если появившееся в результате замены вхождение q^m целиком входит в A_1 или в A_2. Рассмотрим оставшуюся возможность:

$$A_1 = C * q^i, \quad A_2 = q^j * \mathfrak{D}, \quad B = C * q^{\infty} * \mathfrak{D}.$$

Очевидно, роль искомых B_1 и B_2 могут играть слова $C * q^{\infty}$, $q^{\infty} * \mathfrak{D}$.

Лемма 6 доказана.

Положим $q_m = \forall$, если m четное, и $q_m = \exists$, если m нечетное, и, как и ранее, $d_0 = \Lambda$, $d_{m+1} = d_m * q_{m+1}$.

ЛЕММА 7. Каждое $A \in W$ может быть представлено, и притом единственным образом, в виде

$$A = q_0^{\alpha_0} * q_1^{\alpha_1} * \ldots * q_m^{\alpha_m} \pmod{W},$$

где α_i есть натуральное число или символ ∞ и $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. При этом $d_m \leq A (mod W)$ и $\neg (d_{m+1} \leq A (mod\, W))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование дискутируемого представления доказывается очевидным образом индукцией по длине слова A . Столь же очевидно, что при этом $d_m \leq A (mod\, W)$. Далее слово

$$q_0^{\alpha_0} * q_1^{\alpha_1} * \ldots * q_m^{\alpha_m} = A_0 * A_1 * \ldots * A_m$$

для некоторых $A_k \leq q_k^{\alpha_k} (mod W)$ каждая из операций $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_3$ сохраняет свойство слова иметь такое разложение. Поэтому $\neg (d_{m+1} \leq A (mod W))$, и, таким образом, m определяется однозначно. Пусть теперь $A = B (mod W)$, где $B = q_0^{\beta_0} * q_1^{\beta_1} * \ldots * q_m^{\beta_m}$ и $0 < \beta_1, \ldots, \beta_m$.

В силу сказанного выше, $B = B_0 * B_1 * \ldots * B_m$ для некоторых $B_k \leq q_k^{\alpha_k} (mod W)$. Легко видеть, что $B_k = q_k^{\beta_k}$. Отсюда $\beta_k \leq \alpha_k$ и, в силу симметрии, $\beta_k = \alpha_k$.

Лемма 7 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. (Определение стандартных множеств приставок). Слова алфавита $\{\forall, \exists\}$ будем называть приставками. Совокупность всех приставок обозначим $\mathcal{P}$. Пусть $A \in W$. Положим

$$\Pi(A) = \{a \in \mathcal{P} : a \leq A (mod\, W)\}.$$

Множество Π приставок будем называть стандартным, если $\Pi = \mathcal{P}$ или $\Pi = \Pi(A)$ для некоторого $A \in W$.

ЛЕММА 8. Пусть $A, B \in W$.

$A \leq B \ (mod\ W)$ равносильно $\Pi(A) \subseteq \Pi(B)$.

Доказательства требует лишь импликация

$$\Pi(A) \subseteq \Pi(B) \longrightarrow A \leq B (mod\, W).$$

Предположим $\Pi(A) \subseteq \Pi(B)$ и обозначим посредством ℓ длину слова B . В силу леммы 7, $A = q_0^{\alpha_0} * \ldots * q_m^{\alpha_m}$ для некоторых m, α_0 и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$. Обозначим $a = q_0^{\ell_0} * \ldots * q_m^{\ell_m}$, где $\ell_i = min\{\alpha_i, \ell + 1\}$. Так как $a \in \Pi(A) \subseteq \Pi(B)$, то $a \leq B (mod W)$. В силу леммы 6 $B = B_0 * \ldots * B_m (mod W)$ для некоторых $B_i \geq q_i^{\ell_i} (mod\, W)$. На самом деле $B_i \geq q_i^{\alpha_i} (mod\, W)$. Это очевидно, если $\ell_i = \alpha_i$. Пусть

$\ell_i = \ell + 1$. Тогда длина B_i меньше ℓ_i, и потому из $B_i \geqslant q_i^{\ell_i} (mod\, W)$ вытекает, что B_i содержит даже вхождение q_i^{∞}. Таким образом,

$$A \leqslant B_0 * \ldots * B_m = B\ (mod\, W)\ .$$

Лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Совокупность стандартных множеств приставок, ч.у. отношением теоретико-множественного отношения, является тесной.

Доказательство с очевидностью вытекает из лемм 5 и 8.

ЛЕММА 10. Объединение возрастающей последовательности стандартных множеств приставок стандартно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Pi_0 \subseteq \Pi_1 \subseteq \ldots$ есть возрастающая последовательность стандартных множеств и $\Pi = \bigcup \Pi_i$. Лемма очевидна, если $\Pi = \mathcal{P}$. Пусть $\Pi \neq \mathcal{P}$. Тогда каждое $\Pi_i = \Pi(A_i)$ для некоторого $A_i \in W$. В силу леммы 7

$$A_i = q_0^{\alpha_{i0}} * \ldots * q_{m(i)}^{\alpha_{im(i)}}\quad (mod\ W)$$

для подходящих $m(i)$, α_{i0} и $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im(i)} > 0$.

Так как $\Pi \neq \mathcal{P}$, то $m = sup\{m(i) : i \in \omega\} < \infty$. Не нарушая общности, мы можем считать, что каждое $m(i) = m$. Положим

$$\alpha_j = sup\{\alpha_{ij} : i \in \omega\} \quad \text{и} \quad A = q_0^{\alpha_0} * \ldots * q_m^{\alpha_m}\ .$$

Докажем, что $\Pi = \Pi(A)$. Если $a \in \Pi$, то для некоторого i $a \leqslant A_i\ (mod\, W)$ и потому $a \leqslant A (mod\, W)$. Обратно, пусть приставка $a \leqslant A\ (mod\ W)$. Слово $A = B_0 * \ldots * B_m$ для некоторых $B_j \leqslant q_j^{\alpha_j} (mod\, W)$. Операции $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_3$ сохраняют свойство слова иметь такое разложение. Так что $a = a_0 * \ldots * a_m$ для некоторых $a_j \leqslant q_j^{\alpha_j} (mod\, W)$. При этом $a_j = q_j^{\ell_j}$ для подходящего натурального ℓ_j. Легко видеть, что при достаточно большом i $\ell_j \leqslant \alpha_{ij}$ при каждом i. При этом $a \leqslant A_i (mod\, W)$, и потому $a \in \Pi_i \subseteq \Pi$.

Лемма 10 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. (Определение замкнутых множеств приставок). Замыканием множества $\Pi \subseteq \mathcal{P}$ назовем $\bar{\Pi} = \{a \in \mathcal{P} : \exists b \in \Pi\ (a \leqslant b)\}$. (Порядок естественный). В случае $\Pi = \bar{\Pi}$ множество Π назовем, как обычно, замкнутым.

ТЕОРЕМА 1. Каждое замкнутое множество приставок есть объединение конечного числа стандартных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π есть замкнутое подмножество $\mathcal{P}$. Каждое $a \in \Pi$ лежит в стандартном $\{b : b \leqslant a\} \subseteq \Pi$. В силу леммы 10 и известной леммы Цорна каждое стандартное подмножество из Π лежит в некотором максимальном среди стандартных подмножеств из Π. Таким образом, Π есть объединение своих максимальных стандартных подмножеств. Между собою эти максимальные стандартные подмножества попарно несравнимы. В силу леммы 9 число их конечно.

Теорема 1 доказана.

ЛЕММА 11. Пусть R есть решетка (структура), $M \subseteq R$ и M тесно и каждый элемент R есть объединение конечного числа элементов M. Тогда R тесно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что R не тесно и $\{x_i\}_{i \in \omega}$ - последовательность элементов R, не имеющая возрастающей подпоследовательности. Тогда найдется такое $i_0 \in \omega$, что

$$i_0 < j \longrightarrow \neg (x_{i_0} \leqslant x_j),$$

и даже бесконечное множество X таких i_0. Последовательность $\{x_i\}_{i \in X}$ удовлетворяет условию $i < j \longrightarrow \neg (x_i \leqslant x_j)$. Представим каждый x_i при $i \in X$ в виде объединения элементов M: $x_i = x_{i0} \vee \ldots \vee x_{im(i)}$. С помощью индукции построим убывающую последовательность $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ и функцию $n = n(i)$, определенную для каждого i из $Y = \{min\, X_k : k \in \omega\}$. Пусть уже построено X_k и $i = min\, X_k$. Если $i > j \in X_k$, то, по крайней мере, для одного $m \leqslant m(i)$ имеет место $\neg (x_{im} \leqslant x_j)$. Так что $X_k - \{i\}$ есть объединение множеств $X_{km} = \{j \in X_k : \neg (x_{im} \leqslant x_j)\}$. Положим $n(i) = min\{m : X_{km}$ - бесконечно$\}$ и $X_{k+1} = X_{kn(i)}$. Легко видеть, что последовательность $\{x_{i\,n(i)}\}_{i \in Y}$ элементов M удовлетворяет условию $i < j \longrightarrow \neg (x_{in(i)} \leqslant x_{jn(j)})$, что противоречит тесноте M.

Лемма 11 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Замкнутые множества образуют тесную подрешетку в решетке всех множеств приставок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объединение и пересечение двух замкнутых множеств приставок, очевидно, замкнуты. Таким образом, замкнутые множества действительно образуют подрешетку. Теснота же ее вытекает из лемм 9 и 11 и теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. (Определение Ξ). Ξ есть квазиупорядоченное множество. Элементами Ξ являются всевозможные последовательности $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots)$, где каждое ξ_i есть натуральное число $(0,1,\dots)$ или символ ∞ , и $\xi \le \eta \ (mod\ \Xi)$ равносильно тому, что

$$\forall i \ (\sum_{i\le j} \xi_j \le \sum_{i\le j} \eta_j).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. (Определение Ξ^*). Ξ^* есть частично упорядоченное множество. Элементами Ξ^* являются в точности такие $\xi\in\Xi$, что $\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \xi_3 \geqslant \dots$ и либо каждое $\xi_i=\infty$, либо ξ имеет хвост из нулей. Порядок в Ξ^* определяется так: $\xi \le \eta \ (mod\ \Xi^*)$ равносильно тому, что $\forall i \ (\xi_i \le \eta_i)$.

ЛЕММА 12. Для каждой $\xi\in\Xi$ положим $\xi^*=(\xi^*_1,\xi^*_2,\dots)$, где $\xi^*_i=\sum_{i\le j}\xi_j$. Отображение $\xi\mapsto\xi^*$ есть гомоморфизм Ξ на Ξ^*. Этот гомоморфизм индуцирует изоморфизм фактор-множества Ξ по отношению $\xi=\eta \ (mod\ \Xi)$ на Ξ^*.

Доказательство очевидно.

ТЕОРЕМА 3. Ч. у. множество Ξ^* тесное.

СЛЕДСТВИЕ. Квазиупорядоченное множество Ξ тесное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Если $\xi,\eta\in\Xi^*$, то и

$$\{max\{\xi_i,\eta_i\}\}_{i=1,2,\dots} \quad \text{и} \quad \{min\{\xi_i,\eta_i\}\}_{i=1,2,\dots}$$

лежат в Ξ^*. Это легко видеть. Так что Ξ^* есть решетка. Обозначим посредством Ξ_1 совокупность всех тех $\xi\in\Xi^*$, у которых все отличные от нуля элементы равны между собою. Каждый элемент решетки Ξ^* есть объединение конечного числа элементов Ξ . В силу леммы 11 достаточно доказать тесноту Ξ_1 .

Каждой $\xi\in\Xi_1$ поставим в соответствие пару (ξ_1,μ) , где $\mu=\infty$, если $\xi=(\infty,\infty,\dots)$, и $\mu=min\{i:\xi_i=0\}$ - в противном случае. Очевидно, отображение $\xi\mapsto(\xi_1,\mu)$ есть изоморфное вложение Ξ_1 в прямое произведение множества $\omega\cup\{\infty\}$ самого на себя. Применение леммы 2 завершает доказательство.

Теорема 3 доказана.

§ 2. Тесные множества и проблема разрешения

Пусть L есть некоторый язык логики предикатов и операций первой ступени. Формулы языка L строятся по обычным правилам с помощью связок и кванторов из индивидных, предикатных и операционных переменных и предикатных и операционных констант. В связи с тем, что мы собираемся рассматривать алгоритмические вопросы, предположим, что переменные и константы языка суть слова некоторого фиксированного конечного алфавита и следующие множества являются рекурсивными: множество всех формул языка L, множество всех индивидных переменных, множество всех предикатных переменных, множество всех i-местных предикатных переменных при каждом натуральном i, множество всех операционных переменных и множество всех i-местных операционных переменных при каждом натуральном i.

Обозначим посредством $\xi_i(L)$ число различных i-местных предикатных переменных и посредством $\eta_i(L)$ число различных i-местных операционных переменных языка L. Ради удобства изложения предположим, что $\xi_0(L)=\eta_0(L)=0$. Предположим также, что если $1\leq i\leq j$, то $\xi_j(L)>0$ влечет $\xi_i(L)=\infty$ и $\eta_j(L)>0$ влечет $\eta_i(L)=\infty$. Относительно числа предикатных и операционных констант языка L никаких предположений делать не будем. Число индивидных переменных бесконечно.

Модель языка L есть непустое множество вместе с определенными на нем предикатными и операционными константами языка L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (Определение $\Phi(\Pi,\xi,\eta)$). Пусть Π есть некоторая совокупность приставок, а $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ и $\eta=(\eta_1,\eta_2,\dots)$ суть последовательности из Ξ. Посредством $\Phi(\Pi,\xi,\eta)$ обозначим совокупность всех таких предваренных и не содержащих свободных индивидных переменных формул α языка L, что

1. приставка из α лежит в Π и

2. при каждом положительном целом i число различных i-местных предикатных (соответственно, операционных) переменных в α не превосходит ξ_i (соответственно, не превосходит η_i).

Пусть $\Phi=\Phi(\Pi,\xi,\eta)$, $\Phi'=\Phi(\Pi',\xi',\eta')$ и $\Pi'\subseteq\Pi$ и $\xi'\leq\xi\pmod{\Xi}$

и $\eta' \leq \eta \ (mod\ \Xi)$. Класс Φ' может формально не содержаться в классе Φ. Но для каждой $\alpha' \in \Phi'$ в классе Φ есть некоторая α, незначительно отличающаяся от α'.

Например, если $\forall\exists\forall \in \Pi$ и $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = 2$ и

$$\alpha' = \forall xy\ [P_1(x)\ \&\ P_2(x) \longrightarrow Q_1(x,y)],$$

то в качестве α можно взять формулу

$$\forall x\, \exists u\, \forall y\ [\ [P_1(x)\ \&\ Q_2(x,x) \longrightarrow Q_1(x,y)]\ \&$$
$$\&\ [P_1(u) \vee \neg P_1(u)\ ]].$$

Другими словами, α получается из α' при помощи операций:

A1. вставления фиктивных вхождений кванторов;

A2. замены одних предикатных переменных на другие с большим числом мест и

A3. аналогично для операционных переменных.

Для каждой модели $\mathfrak{M}$ языка L формулы α и α' одновременно выполнимы или невыполнимы в $\mathfrak{M}$ и одновременно общезначимы или необщезначимы в $\mathfrak{M}$.

Если проблема вхождения в Π алгоритмически разрешима и каждый из предикатов $A(m,i) \equiv m \leq \xi_i$ и $B(m,i) \equiv m \leq \eta_i$ разрешим (рекурсивен), то существует алгоритм, строящий по α' соответствующую α.

Имеет место также следующая

ЛЕММА 13. Пусть $\mathfrak{A}$ есть алгоритм, распознающий выполнимость или какое-либо другое свойство формул, которое сохраняют операции A1–A3. И пусть для каждой формулы из Φ алгоритм $\mathfrak{A}$ кончает работу через конечное число шагов. Тогда аналогичный алгоритм существует и для Φ'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемая последовательность

$$\Phi(\Pi', \xi', \eta') \longrightarrow \Phi(\Pi', \xi', \eta) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \Phi(\Pi', \xi, \eta) \longrightarrow \Phi(\Pi, \xi, \eta),$$

замечаем, что достаточно разобрать три частных случая леммы:

$$\xi' = \xi \quad \text{и} \quad \eta' = \eta\ ,$$
$$\Pi' = \Pi \quad \text{и} \quad \eta' = \eta\ ,$$
$$\Pi' = \Pi \quad \text{и} \quad \xi' = \xi\ .$$

Разберем лишь первый из них.

Пусть π_1 есть приставка формулы α' и $\pi_1, \pi_2, \ldots$ - последовательность, содержащая все приставки, мажорирующие π_1 в смысле естественного порядка. Пусть α_i получается из α' добавлением некоторого числа (0,1,...) вхождений фиктивных кванторов и приставка α_i есть π_i. Заставим алгоритм $\mathfrak{A}$ сделать один шаг для формулы $\alpha' = \alpha_1$, потом по два шага для каждой из формул α_1, α_2, потом по три шага для каждой из формул $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и т.д. Ясно, что через конечное число шагов мы выясним, обладает ли α' распознаваемым свойством.

Лемма 13 доказана.

Все сказанное делает естественным следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. (Определение $\Psi(\Pi, \xi, \eta)$). Пусть Π есть замкнутое множество приставок, а $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ суть последовательности из Ξ^*. Посредством $\Psi(\Pi, \xi, \eta)$ обозначим совокупность всех таких предваренных и не содержащих свободных индивидных переменных формул α языка L, что

1. приставка из α лежит в Π и
2. при каждом положительном целом i число различных не менее чем i -местных предикатных (соответственно, операционных) переменных в $\alpha \leq \xi_i$ (соответственно $\leq \eta_i$).

Если Π стандартно, класс $\Psi(\Pi, \xi, \eta)$ тоже будем называть стандартным.

ЛЕММА 14. *Пусть для произвольного $\Phi(\Pi, \xi, \eta)$ ξ^* и η^* имеют тот же смысл, что и в лемме 12. Тогда $\Psi(\overline{\Pi}, \xi^*, \eta^*)$ есть объединение всех таких $\Phi(\Pi', \xi', \eta')$, что $\Pi' \subseteq \overline{\Pi}$ и $\xi' \leq \xi\ (mod\ \Xi)$ и $\eta' \leq \eta\ (mod\ \Xi)$.*

Доказательство очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Посредством $\mathcal{F}$ обозначим упорядоченную по включению совокупность всевозможных $\Psi(\Pi, \xi, \eta)$.

ТЕОРЕМА 4. *Ч. у. множество $\mathcal{F}$ тесно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим на короткое время посредством

M упорядоченную по включению совокупность всевозможных замкнутых Π. В силу теоремы 2, M тесно. В силу теоремы 3, ч.у. множество Ξ^* тесно. В силу леммы 2, тесно прямое произведение $M \times \Xi^* \times \Xi^*$. Отображение $(\Pi, \dot{\xi}, \eta) \longrightarrow \psi(\Pi, \dot{\xi}, \eta)$ есть гомоморфизм этого прямого произведения на $\mathcal{F}$. Применение леммы 2 завершает доказательство.

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X есть такое подмножество $\mathcal{F}$, что

1. $\psi_1 \in \mathcal{F} \;\&\; \psi_2 \in X \;\&\; \psi_1 \subseteq \psi_2 \longrightarrow \psi_1 \in X$,
2. $\psi(\Pi_1, \dot{\xi}, \eta) \in X \;\&\; \psi(\Pi_2, \dot{\xi}, \eta) \in X \longrightarrow$
$\longrightarrow \psi(\Pi_1 \cup \Pi_2, \dot{\xi}, \eta) \in X$

и M есть совокупность минимальных $\psi \in \mathcal{F} - X$.

Тогда

1. M конечно и
2. $\psi \in \mathcal{F} - X$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathcal{F}$ и содержит некоторый $\psi_0 \in M$, и
3. каждое $\psi \in M$ стандартно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два утверждения теоремы 5 вытекают в силу леммы 1 из тесноты $\mathcal{F}$. Третье утверждение докажем от противного. Пусть $\psi = \psi(\Pi, \dot{\xi}, \eta) \in M$ и Π не стандартно. В силу теоремы 1 Π есть объединение конечного числа стандартных Π_i. В силу минимальности ψ классы $\psi(\Pi_i, \dot{\xi}, \eta) \in X$. Но тогда и $\psi = \psi(\cup \Pi_i, \dot{\xi}, \eta) \in X$. Получили противоречие.

Теорема 5 доказана.

В качестве множества X теоремы 5 может быть выбрана совокупность тех классов $\psi \in \mathcal{F}$, в которых разрешима проблема распознавания некоторого свойства формул. Вместо разрешимости может идти речь о примитивной рекурсивности или о том, что степень неразрешимости проблемы в смысле какого-то сведения $< d$ (или $\leq d$), где d – фиксированная степень.

Желая сделать имена элементов $\mathcal{F}$ конструктивными объектами и ради удобства изложения следующей главы, дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть $\psi(\Pi, \dot{\xi}, \eta) \in \mathcal{F}$. В выражении „$\psi(\Pi, \dot{\xi}, \eta)$“

1. заменим „Π“

1.1. словом $\mathcal{All}$, если Π есть множество всех приставок,

1.2. любым таким $A \in W$, что $\Pi = \Pi(A)$, или

1.3. выражением $A_1 \cup \ldots \cup A_m$, если $\Pi = \Pi(A_1) \cup \ldots \cup \Pi(A_m)$;

2. заменим „ξ“ (соответственно „η“)

2.1. словом $\mathcal{All}$, если ξ (соответственно η) есть $(\infty, \infty, \ldots)$,

2.2. символом $\emptyset$ если ξ (соответственно η) есть $(0, 0, \ldots)$, и

2.3. кортежем, который получается из ξ (соответственно, из η) опусканием хвоста из нулей в остальных случаях.

ЛЕММА 15. Имеют место следующие утверждения:

1. Пусть A_1 и A_2 пробегают W . Предикат $A_1 \leq A_2 \,(mod\, W)$ примитивно рекурсивен.

2. Пусть Π_1 и Π_2 пробегают указанные в определении 11 имена всевозможных замкнутых множеств приставок. Предикат $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ примитивно рекурсивен.

3. Пусть ξ и η пробегают указанные в определении 11 имена всевозможных последовательностей из Ξ^*. Предикат $\xi \leqslant \eta \,(mod\, \Xi^*)$ примитивно рекурсивен.

4. Пусть Ψ_1 и Ψ_2 пробегают указанные в определении 11 имена всевозможных элементов $\mathcal{F}$. Предикат $\Psi_1 \subseteq \Psi_2$ примитивно рекурсивен.

5. Проблемы вхождения в замкнутое Π и в $\Psi(\Pi, \xi, \eta)$ примитивно рекурсивны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опустим утомительные подробности. Они легко восстанавливаются. Необходимые сведения можно найти в [7].

Первое утверждение леммы 15 вытекает из очевидных эквивалентностей:

$$A_1 * \forall \leqslant A_2 * \forall (mod W) \equiv A_1 \leqslant A_2 (mod W),$$

$$A_1 * \forall^\infty \leqslant A_2 * \forall (mod W) \equiv A_1 * \forall^\infty \leqslant A_2 (mod W),$$

$$A_1 * \exists \leqslant A_2 * \forall (mod W) \equiv A_1 * \exists \leqslant A_2 (mod W),$$

$$A_1 * \exists^\infty \leqslant A_2 * \forall (mod W) \equiv A_1 * \exists^\infty \leqslant A_2 (mod W),$$

$$A_1 * \forall \leqslant A_2 * \forall^\infty (mod W) \equiv A_1 \leqslant A_2 * \forall^\infty (mod W),$$

$$A_1 * \forall^\infty \leqslant A_2 * \forall^\infty (mod W) \equiv A_1 \leqslant A_2 * \forall^\infty (mod W),$$

$$A_1 * \exists \leqslant A_2 * \forall^\infty (mod W) \equiv A_1 * \exists \leqslant A_2 (mod W),$$

$$A_1 * \exists^\infty \leqslant A_2 * \forall^\infty (mod W) \equiv A_1 * \exists^\infty \leqslant A_2 (mod W)$$

и аналогичных для $A_2 * \exists$ и $A_2 * \exists^\infty$.

Из этого первого утверждения, и леммы 8 следует примитивная рекурсивность предиката $\Pi(A_1) \subseteq \Pi(A_2)$. Далее,

$$\Pi(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \Pi_i \tag{1}$$

равносильно дизъюнкции

$$\bigvee_{i=1}^{m} [\Pi(A) \subseteq \Pi_i]. \tag{2}$$

В самом деле, (2) очевидным образом влечет (1). Обратно, пусть $A^{(n)}$ получается из A заменой каждого вхождения q^∞ на вхождение q^n. Каждое $A^{(n)}$ лежит в некотором Π_i. В силу конечности m некоторое Π_i содержит бесконечное число $A^{(n)}$, т.е. содержит $\Pi(A)$. Таким образом, предикат

$$\Pi(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \Pi(A_i)$$

примитивно рекурсивен. Наконец, $\cup \Pi(B_j) \subseteq \cup \Pi(A_i)$ равносильно конъюнкции $\wedge [\Pi(B_j) \subseteq \cup \Pi(A_i)]$. Утверждение 2 доказано.

Оставшиеся утверждения следуют из второго и третьего.

Лемма 15 доказана.

ТЕОРЕМА 5'. Если классы $\psi(\Pi, \xi, \eta)$ будут задаваться в соответствии с определением 11, то в условиях теоремы 5 имеет место также следующее: проблема вхождения $\psi(\Pi, \xi, \eta)$ в X примитивно рекурсивна.

Доказательство очевидно.

§ 3. Примечания

1. Относительно языка L мы предположили, что он не содержит пропозициональных (т.е. нульместных предикатных) переменных. Это ограничение несущественно. Существует известный и простой способ избавления от пропозициональных переменных, достаточный для многих целей (см., например, [1]). Кроме того, мы могли считать возможным наличие в L пропозициональных переменных. В определениях $\Phi(\Pi, \xi, \eta)$ и $\psi(\Pi, \xi, \eta)$ можно было указать дополнительный параметр, характеризующий количество пропозициональных переменных. Теоремы § 2 сохранили бы при этом свою силу.

2. Относительно языка L мы предположили также, что он не содержит символов переменных нульместных операций. И это ограничение несущественно. И здесь можно использовать дополнительный параметр, характеризующий наличие нульместных операционных переменных.

Есть и другое соображение. Предположим, что в определении $\psi(\Pi, \xi, \eta)$ мы считаем, что $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$, где η_i ограничивает число i -местных операций. Имеет место

ЛЕММА 16. Пусть $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ и $\eta^* = (0, \eta_1, \eta_2, \ldots)$,

$$\Pi^* = \{\exists^n * \pi : n \in \omega \,\&\, n \leq \eta_0 \,\&\, \pi \in \Pi\}.$$

Существует примитивно рекурсивный алгоритм, перерабатывающий произвольную $\alpha \in \psi(\Pi, \xi, \eta)$ в такую $\alpha^* \in \psi(\Pi^*, \xi, \eta^*)$, что α и α^* выполнимы на одних и тех же моделях языка L, и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для перехода от α к α^* нужно заменить нульместные переменные операции индивидными переменными и навесить кванторы существования. Для перехода от α^* к α нужно проделать обратное. Лемма 16 доказана.

3. Отметим еще, что упорядоченная по включению совокупность замкнутых множеств и приставок и ч.у. множества Ξ^* и $\mathcal{F}$ являются дистрибутивными и полными решетками.

4. Теоремы 5 и 5$'$ не зависят от наших предположений о том,что формулы языка L являются конструктивными объектами. Эти теоремы сохраняют силу и для некоторых других логик.

Глава 2. ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ ЧИСТОЙ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ И ОПЕРАЦИЙ

§ 1. Формулировка основного результата

Для чтения настоящей главы из предыдущей главы необходимы лишь определения. С другой стороны, главу 2 можно считать продолжением главы 1. В этой главе мы сделаем дополнительные предположения относительно языка L . Это будет язык чистой логики предикатов и операций. Чистота обозначает отсутствие предикатных и операционных констант. В частности, отсутствует знак равенства. В начале § 2 главы 1 мы предположили рекурсивными некоторые множества,имеющие отношение к языку L . В этой главе мы предположим, что эти множества примитивно рекурсивны. Будем считать также, что при $i>0$ $\xi_i(L)=\eta_i(L)=\infty$.

В определении 11 главы 1 мы присвоили стандартные имена классам $\psi(\Pi,\xi,\eta)$. Аналогичные имена присвоим классам $\Phi(\Pi,\xi,\eta)$ в тех случаях, когда Π замкнуто и каждая из последовательностей ξ и η либо состоит сплошь из символов ∞ , либо имеет хвост из нулей. Так, например, $\Phi(\mathcal{A}\ell\ell,(0,1),\phi)$ есть совокупность всех предваренных и не содержащих свободных индивидных переменных формул языка L , в которых на самом деле нет символов операций и в которых встречается в точности один символ предиката, и этот символ — двуместный. Конечно, можно было бы обойтись вообще без классов $\Phi(\Pi,\xi,\eta)$, но этим классам соответствует более естественное ограничение предикатных и операционных переменных.

Будем предполагать некоторую геделеву нумерацию формул языка L . Геделев номер формулы α будем обозначать $[\alpha]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что множество Φ формул языка L примитивно рекурсивно по Левенгейму (согласно [8], он первый обнаружил формулы, выполнимые лишь в бесконечных областях), если существует такая примитивно рекурсивная функция f , что если $\alpha\in\Phi$ просто выполнима, то она выполнима уже в конечной области мощности $\leq f[\alpha]$.

Пусть Φ_1 и Φ_2 суть классы формул и g – такая рекурсивная функция, что при $\alpha_1 \in \Phi_1$ $g([\alpha_1])$ есть гёделев номер некоторой $\alpha_2 \in \Phi_2$. Если при этом формула α_1 выполнима тогда и только тогда, когда α_2 выполнима, то говорят, что класс Φ_1 сводится к Φ_2 по выполнимости Если, кроме того, Φ_1 есть класс всех формул языка L, то Φ_2 называют классом сведения по выполнимости. Аналогично определяется сведение по конечной выполнимости, т.е. по выполнимости в конечных областях. Если функция g сводит Φ_1 к Φ_2 и по простой выполнимости и по конечной выполнимости, то говорят, что Φ_1 консервативно сводится к Φ_2. Если к тому же функция g примитивно рекурсивна, можно говорить о примитивно рекурсивном и консервативном сведении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть функция g осуществляет примитивно рекурсивное и консервативное сведение Φ_1 к Φ_2. Назовем это сведение просто сильным, если существуют такие примитивно рекурсивные функции $h_1(m,n)$ и $h_2(m)$, что если $g([\alpha_1]) = [\alpha_2]$, то выполнимость α_1 на множестве мощности $\leq m$ влечет выполнимость α_2 на множестве мощности $\leq h_1(m, [\alpha_1])$ и выполнимость α_2 на множестве мощности $\leq m$ влечет выполнимость α_1 на множестве мощности $\leq h_2(m)$.

Сильная сводимость удобна для нас своею согласованностью с примитивной рекурсивностью по Левенгейму.

ЛЕММА 17. *Пусть Φ_1 сильно сводится к Φ_2. Тогда если класс Φ_2 примитивно рекурсивен по Левенгейму, то и Φ_1 таков, а если Φ_1 есть класс сильного сведения, то и Φ_2 таков.*

Доказательство очевидно.

Имеет место (см. [2])

ТЕОРЕМА 6. *Каждый класс $\psi = \psi(\Pi, \xi, \Phi)$ удовлетворяет, по крайней мере, одному из следующих трех условий:*

1. Π и ξ_1 конечны,

2. ψ примитивно рекурсивен по Левенгейму,

3. ψ есть класс сильного сведе-

н и я.

ψ примитивно рекурсивен по Левенгейму тогда и только тогда, когда $\xi_2 = 0$ или

$$\Pi \subseteq \Pi(\exists^\infty \forall^\infty) \cup \Pi(\exists^\infty \forall^2 \exists^\infty).$$

ψ есть класс сильного сведения тогда и только тогда, когда он содержит, по крайней мере, один из следующих девяти классов:

$$\Phi 1 = \Phi(\forall\exists\forall,\ (\infty, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 2 = \Phi(\forall^3\exists,\ (\infty, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 3 = \Phi(\forall^\infty\exists,\ (0, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 4 = \Phi(\forall\exists\forall^\infty, (0, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 5 = \Phi(\exists^\infty\forall^3\exists, (0, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 6 = \Phi(\forall^3\exists^\infty, (0, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 7 = \Phi(\exists^\infty\forall\exists\forall, (0, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 8 = \Phi(\forall\exists^\infty\forall, (0, 1),\ \phi),$$
$$\Phi 9 = \Phi(\forall\exists\forall\exists^\infty, (0, 1),\ \phi).$$

Правда, вместо примитивной рекурсивности по Левенгейму в [2] идет речь об эффективном распознавании выполнимости и конечной выполнимости, а вместо классов сильного сведения идет речь о классах сведения по выполнимости и конечной выполнимости. Мы не имеем здесь в виду новые распознающие и сводящие алгоритмы. Просто отметили более сильные свойства тех алгоритмов, которые упоминаются в [2]. Проверку позволим себе здесь не проводить.

(Как будто бы даже в определении сильной сводимости можно считать $h_2(m) \equiv m$).

Содержание настоящей главы составляет доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. Каждый класс $\psi = \psi(\Pi, \xi, \eta)$ удовлетворяет, по крайней мере, одному из следующих трех условий:

1. Π и ξ_1 конечны, и $\eta_1 = 0$;

2. ψ примитивно рекурсивен по Левенгейму;

3. ψ есть класс сильного сведения.

ψ примитивно рекурсивен по Левенгейму тогда и только тогда, когда имеет место, по крайней мере, одна из следующих четырех возможностей:

1. $\xi_1 = 0$ (тривиальная возможность);
2. $\xi_2 = \eta_2 = 0$;
3. $\Pi \subseteq \Pi(\exists^\infty\forall^\infty) \cup \Pi(\exists^\infty\forall^2\exists^\infty)$ и $\eta_1 = 0$;
4. $\Pi \subseteq \Pi(\exists^\infty\forall\exists^\infty)$.

ψ есть класс сильного сведения тогда и только тогда, когда он содержит, по крайней мере, один из классов $\Phi 1 - \Phi 9$ теоремы 6 или один из следующих классов:

$$\Phi 10 = \Phi(\forall^2, (0,1), (1)),$$
$$\Phi 11 = \Phi(\forall^2, (1), (0,1)).$$

Не трудно видеть, что первое предложение теоремы 7 следует из теоремы 6 и двух предложений теоремы 8. Примитивная рекурсивность по Левенгейму класса $\Phi(\exists^\infty\forall\exists^\infty, All, All)$ доказана в [3]. Необходимо доказать лишь, таким образом, что класс $\Phi(All, (\infty), (\infty))$ примитивно рекурсивен по Левенгейму и что множества $\Phi 10$ и $\Phi 11$ являются классами сильного сведения. Доказательство этих фактов составляет содержание оставшейся части настоящей работы.

§ 2. Классы сильного сведения

ТЕОРЕМА 8. Класс $\Phi 10$ из теоремы 7 есть класс сильного сведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha = \forall x \exists u \forall y \mathfrak{A}(x,u,y)$ – формула из $\Phi 1$ (см. теорему 6) и P – символ двуместного предиката из $\mathfrak{A}$, а $P_1, \ldots, P_{m-1}$ – все различные символы одноместных предикатов из $\mathfrak{A}$. Пусть " $'$ " есть символ одноместной функции. Положим $x^0 = x$, $x^{i+1} = (x^i)'$. Обозначим посредством $\mathfrak{A}^*$ формулу, которая получается из $\mathfrak{A}$ заменой при каждом $\vartheta = x, u, y$ и каждом $i = 1, \ldots, m-1$ вхождения каждой подформулы $P_i(\vartheta)$ на вхождение подформулы $P(\vartheta, \vartheta^i)$. Обозначим для краткости посредством $\mathfrak{L}(x)$ формулу $P(x', x)$ и посредством $\mathcal{L}(x)$ формулу

$$\bigvee_{i=0}^{m-1} \mathcal{L}(x) \ \& \bigwedge_{0\leq i<j\leq m-1} \neg(\mathcal{L}(x^i) \ \& \ \mathcal{L}(x^j)) .$$

Положим

$$\alpha^* = \forall xy \ [\ \mathcal{L}(x) \ \&$$

$$\& \ [\ \mathcal{L}(x) \ \& \ \mathcal{L}(y) \longrightarrow \alpha^*(x, x^m, y)]\ ] .$$

Легко видеть, что отображение $\alpha \Longrightarrow \alpha^*$ осуществляет сильное сведение $\Phi 1$ к $\Phi 10$.

Теорема 8 доказана.

В мае 1966 года В.П.Оревков сообщил автору свой результат о том, что классом сведения по выводимости является совокупность формул вида $\exists xy(\mathcal{D}_1 \& \mathcal{D}_2)$, где $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – дизъюнкции элементарных формул или их отрицаний, содержащие 2 символа одноместных операций и фиксированное число символов двуместных и одноместных предикатов. Доказательство этого результата как будто бы не опубликовано. Если отвлечься от факта наличия лишь двух конъюнктов результат Оревкова есть непосредственное следствие теоремы 8. В этой статье мы интересуемся строением бескванторных частей лишь в пределах наличия символов предикатов и операций.

ТЕОРЕМА 9. Класс $\Phi 11$ из теоремы 7 есть клас сильного сведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$\alpha \in \Phi 10$,

P – символ двуместного предиката из α ,

f – символ одноместной операции из α ,

p – символ одноместного предиката и

F – символ двуместной операции.

Заменим в α операцию $f(x)$ операцией $F(x,x)$ и предикат $P(x,y)$ предикатом $p(F(x,y))$. Получим некоторую α^* . Отображение $\alpha \Rightarrow \alpha^*$ осуществляет сильное сведение $\Phi 10$ к $\Phi 11$. Докажем это. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P, f \rangle$ – модель для α , т.е. $\mathfrak{M}$ есть такая алгебраическая система, в которой α получает значение истины. В силу универсальности формулы α каждая подсистема системы $\mathfrak{M}$, замкнутая относительно операции f , также есть модель для α . Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать, что $M=\{a, fa, ffa, \dots\}$ для некоторого a . В случае, когда M конечно, пусть m - минимальное число, при котором $f^{m}(a)=f^{k}(a)$ для $k<m$. Если $k>1$, выкинем из M элементы $a, \dots, f^{k-2}(a)$. Снова получим модель для α . Если $k=0$ добавим к M новый элемент b и положим

$fb=fa$,

$$P(b, f^{i}(a)) \quad \text{равносильно} \quad P(a, f^{i}(a)),$$
$$P(f^{i}(a), b) \quad \text{равносильно} \quad P(f^{i}(a), a).$$

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что либо M бесконечно, либо для некоторого $m>1$ элементы $a, fa, \dots, f^{m-1}(a)$ различны и $f^{m}(a)=f(a)$. Обозначим $a_i=f^{i}(a)$. Положим

$$p(a_{i+1}) \quad \text{равносильно} \quad P(a_i, a_i),$$
$$p(a_0) \quad \text{равносильно} \quad \neg p(a_1),$$
$$F(a_i, a_i)=a_{i+1}.$$

Пусть $a_i \neq a_j$ и, для определенности, утверждение $p(a_0)$ оказалось истинным. Полагаем далее:

$$P(a_i, a_j) \quad \text{влечет} \quad F(a_i, a_j)=a_0,$$
$$\neg P(a_i, a_j) \quad \text{влечет} \quad F(a_i, a_j)=a_1.$$

В результате получим модель для α^{*} . Построение же модели для α по модели для α^{*} очевидно.

Теорема 9 доказана.

§ 3. Случай отсутствия двуместных символов

ТЕОРЕМА 10. Множество $\Phi(All, (\infty), (\infty))$ примитивно рекурсивно по Левенгейму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha \in \Phi(All, (\infty), (\infty))$$

$p_1, \dots, p_m$ - все различные символы одноместных предикатов из α и

$f_1, \dots, f_m$ - различные символы одноместных операций, не встречающиеся в α .

Заменим в α для каждой индивидной переменной x каждую подформулу $p_i(x)$ подформулой $p_1(f_i(x))$. Получим некоторую α^{*}. Очевидно, отображение $\alpha \Longrightarrow \alpha^{*}$ осуществляет сильное сведение

$$\Phi(\mathcal{All},(\infty),(\infty)) \quad \text{и} \quad \Phi(\mathcal{All},(1),(\infty)).$$

В силу леммы 17 осталось доказать примитивную рекурсивность по Левенгейму этого последнего множества. Отметим, что в предшествующей части доказательства можно ограничиться введением лишь одного нового символа операции.

Пусть $\alpha \in \Phi(\mathcal{All},(1),(\infty))$ и ρ – символ одноместного предиката из α. Каждый терм t из α имеет вид $t = x$ или $t = f_j f_{j-1} \dots f_1(x)$, где f_i и f_j не обязательно различны. В первом случае высотой терма t назовем нуль, во втором – число j. Обозначим посредством m максимум высоты термов из α и посредством T –совокупность всех возможных термов высоты $\leq m$ с символами операций из α. Термы, переходящие друг в друга при переименовании индивидных переменных, не будем различать в T. Таким образом, T конечно.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть модель для α, т.е. некоторое множество M, в котором так определены ρ и символы предикатов из α, что α получает значение истины. Определим в M отношение эквивалентности E следующим образом:

$$E(a,b) \quad \text{равносильно} \quad \bigwedge_{t \in T} [\rho(t(a)) \sim \rho(t(b))].$$

Множество M/E обозначим N. Очевидно, $\overline{\overline{N}} \leq 2^{\overline{\overline{T}}}$. Положим

$$\rho(a/E) \quad \text{равносильно} \quad \rho(a).$$

Далее фиксируем в каждом классе a/E некоторый элемент, который будем обозначать sa. Положим для всякого символа операции f из α

$$f(a/E) = f(sa)/E.$$

Определение ρ и символов операций превращает N в некоторую алгебраическую систему $\mathfrak{N}$. Покажем, что $\mathfrak{N}$ есть модель для α. Тем самым теорема 10 будет доказана.

Каждая атомная подформула из α имеет вид $\rho(t)$, где $t \in T$. Поэтому нам достаточно доказать, что для всякого $t \in T$ и всякого

$$a \in M \quad \rho(t(a)) \quad \text{равносильно} \quad \rho(t(a/E)). \qquad (1)$$

При $i \leq m$ обозначим посредством T_i совокупность всех термов из T высоты $\leq i$ и посредством E_i такое отношение на M, что $E_i(a,b)$ равносильно

$$\bigwedge_{t \in T_i} [p(t(a)) \sim p(t(b))].$$

Так что $T = T_m$ и $E = E_m$. При $i < m$ имеем

$$E_{i+1}(a, b) \quad \text{влечет} \quad E_i(a, b).$$

ЛЕММА 18. Если $t \in T_i$, то

$$t(a/E) = c/E \quad \text{влечет} \quad E_{m-i}(t(a), c).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $i = 0$ лемма очевидна. Пусть $i = 1$, $t(x) = f(x)$ для некоторого f и $f(a/E) = c/E$. С другой стороны,

$$f(a/E) = f(sa)/E \quad \text{и} \quad E(a, sa).$$

Отсюда имеем $E_{m-1}(fa, f(sa))$ и $E_m(f(sa), c)$, а потому и $E_{m-1}(fa, c)$. Далее по индукции. Пусть $t = f(\tau) \in T_{i+1}$ и

$$\tau(a/E) = b/E \quad \text{и} \quad f(b/E) = c/E.$$

Имеем $E_{m-i}(\tau(a), b)$ и $E_{m-1}(f(b), c)$.

Отсюда получаем $E_{m-i-1}(t(a), f(b))$ и $E_{m-i-1}(t(a), c)$.

Лемма 18 доказана.

Подставляя $i = m$ в лемму 18, получаем

$$t(a/E) = c/E \quad \text{влечет} \quad p(t(a)) \sim p(c).$$

Так как $p(c/E)$ равносильно $p(c)$, то отсюда следует (1).

Теорема 10 доказана. Вместе с тем доказана и теорема 7.

Класс $\Phi(\exists^\infty \forall \exists^\infty, \mathcal{All}, \mathcal{All})$ мы не будем обсуждать здесь. (См. по этому поводу [3]). Класс $\Phi(\mathcal{All}, (\infty), (\infty))$ на самом деле не трудно свести к классу $\Phi(\exists^\infty \forall \exists^\infty, \mathcal{All}, \mathcal{All})$. Согласно [8] разрешим по выводимости интересный класс формул, содержащий и $\Phi(\forall^\infty \exists \forall^\infty, \mathcal{All}, \mathcal{All})$ и $\Phi(\mathcal{All}, (\infty), (\infty))$. По поводу последнего см. также [5]. По поводу класса $\Phi 10$ см. замечание после доказательства теоремы 8.

Поступила в редакцию
13. 1. 1969 г.

Литература

I. W.ACKERMANN, Solvable cases of the decision problem, Amsterdam, 1954.

2. Ю.Ш.ГУРЕВИЧ, Об эффективном распознавании выполнимости формул УИП, Алгебра и логика, 5, № 2 (1966), 25-55.

3. Ю.Ш.ГУРЕВИЧ. Формулы с одним $\forall$, в сб. "Памяти А.И.Мальцева" (в печати).

4. В.А.ЛИВШИЦ, Некоторые классы сведения и неразрешимые теории. Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института им. В.А.Стеклова, 4, 1967.

5. M.H.LÖB, Decidability of the monadic predicate calculus with unary function symbols, J. Symb. Logic, 32, N 4 (1967), 563 (Abstract).

6. А.Г.КУРОШ, Лекции по общей алгебре, Москва, 1962.

7. А.И.МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, Москва, 1965.

8. С.Ю.МАСЛОВ, Обратный метод установления выводимости для непредваренных формул исчисления предикатов, ДАН, 172, № 1 (1967), 22-25.

9. А.ЧЕРЧ, Введение в математическую логику, Москва, 1960.