ცალკე ამონაბეჭდი
Отдельный оттиск

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე

СООБЩЕНИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
ГРУЗИНСКОЙ ССР

BULLETIN
OF THE ACADEMY OF SCIENCES
OF THE GEORGIAN SSR

70, № 2, მაისი, 1973

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, 70, № 2, 1973
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, 70, № 2, 1973
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, 70, № 2, 1973

УДК 519.05

МАТЕМАТИКА

Ю. Ш. ГУРЕВИЧ, Т. В. ТУРАШВИЛИ

УСИЛЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА Я. ШУРАНЬИ

(Представлено членом-корреспондентом Академии Л. П. Гокиели 15.1.1973)

Через ЛП обозначаем логику предикатов I ступени (без символов функций и без знака равенства). Во всех встречающихся ниже формулах ЛП все предикатные переменные, за исключением одной, 1-местны, а эта одна 2-местна. Выражение $A(x, y, z)$ обозначает бескванторную формулу ЛП, все индивидные переменные которой суть x, y, z. Аналогичный смысл имеют выражения $B(x, y)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$. 2-местные предикатные переменные мы обозначаем через F и G, а 1-местные — через $f_0, f_1, \ldots, g, g_0, g_1, g_2$.

В [1] Шураньи устанавливает (см. следствие на стр. 98), что классом сведения по выполнимости является совокупность формул вида

$$\forall x\, Cxx \,\&\, \forall xy\, \exists z B(x, y, z) \,\&\, \forall xyz\, C(x, y, z).$$

Этот результат Шураньи может быть усилен следующим образом:

Теорема. *Классом консервативного сведения является совокупность формул вида*

$$\forall x\, Gxx \,\&\, \forall x\, \exists y\, B(x, y) \,\&\, \forall xyz\, C(x, y, z).$$

Если выкинуть конъюнкт $\forall x\, Gxx$, то ослабленная теорема превращается в теорему Кара (см. теорему 14 из [2]), идею доказательства которой мы используем.

Доказательство теоремы. Пусть формула

$$\alpha = \forall x\, \exists y\, \forall z\, A(x, y, z)$$

с бинарной предикатной переменной F содержит лишь бинарные атомы Fxz, Fzx, Fyz. Согласно [3], такие α образуют класс консервативного сведения. Пусть унарные предикатные переменные из α суть $f_1, \ldots, f_n$. Положим

$$\beta = \forall x\, Gxx \,\&\, \forall x\, \exists y\, B(x, y) \,\&\, \forall xyz\, C(x, y, z),$$

где $B(x, y)$ есть конъюнкция формул

$$Gxy, \quad \bigvee_{i=0}^{2} g_i x, \quad \neg \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (g_i x \,\&\, g_j x),$$

$$g_0 x \supset g_1 y, \quad g_1 x \supset g_2 y, \quad g_2 x \supset g_0 y, \quad g_1 x \vee g_2 x \supset \bigwedge_{i=0}^{n} (f_i x \sim f_i y),$$

а $C(x, y, z)$ — конъюнкция формул

1) $g_2 x \,\&\, g_0 y \,\&\, g_1 z \,\&\, Gxy \,\&\, Gyz \supset Gxz$,
2) $(g_2 x \vee g_0 x) \,\&\, g_1 y \,\&\, g_1 z \,\&\, Gxy \,\&\, Gxz \supset Gyz$,
3) $g_2 x \,\&\, g_2 y \,\&\, (g_0 z \vee g_1 z) \,\&\, Gxz \,\&\, Gyz \supset Gxy$,

4) $(g_1x \& g_1y) \vee (g_2x \& g_2y) \& Gxy \supset$

$$\supset \bigwedge_{i=0}^{n} (f_1x \sim f_1y) \& Gxz \sim Gyz) \& (Gzx \sim Gzy),$$

5) $g_1x \& g_2y \& g_0z \& Gxy \supset (Gxz \sim Gzy)$,

6) $g_2x \& g_0y \& g_0z \& Gxy \& \neg Gxz \supset (Gzx \sim Gyz)$,

7) $g_1x \& g_2y \& g_0z \& Gxy \& Gyz \supset (Gxz \sim f_0z)$,

8) $g_0x \& g_1y \& g_0z\, Gxy \& \neg Gzx \supset A'(x, y, z)$,

где A' получается из A заменой F на G.

9) $g_0x \& g_1y \& Gxy \supset A''(x, y, x)$,

где $A''(x, y, x)$ получается из $A(x, y, x)$ заменой Fxx и Fyx на f_0x и Gyx соответственно.

Лемма 1. Если α выполнима (соответственно конечно выполнима), то и β такова.

Доказательство. Пусть $M \models \alpha$ и штрих обозначает сколемову функцию для α в M, т. е. $M \models \forall xz A(x, x', z)$. Строим модель N:

$$|N| \rightleftarrows |M| \times \{0, 1, 2\},$$

где $|M|$ есть мир модели M; аналогичный смысл имеет $|N|$. Далее

$$g_\varepsilon(a, \delta) \rightleftarrows \varepsilon = \delta, \quad f_0(a, 0) \rightleftarrows f_0(0), \quad f_0(a, 1) \rightleftarrows f_0(a, 2) \rightleftarrows f_0a'.$$

$$f_i(a, \varepsilon) \rightleftarrows f_i a \quad \text{для} \quad i > 0,$$

$$G(a, 0)(a, 0) \quad \text{истинно},$$

$$G(a, 0)(b, 0) \rightleftarrows Fab \quad \text{при} \quad a \neq b,$$

$$G(a, 1)(b, 1) \rightleftarrows G(a, 2)(b, 2) \rightleftarrows G(a, 0)(b, 1) \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows G(a, 1)(b, 0) \rightleftarrows a = b,$$

$$G(a, 2)(b, 0) \rightleftarrows G(a, 2)(b, 1) \rightleftarrows b = a',$$

$$G(a, 1)(b, 0) \rightleftarrows G(b, 0)(a, 2) \rightleftarrows Fa'b.$$

Очевидно, $N \models \beta$ лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если β выполнима (соответственно конечно выполнима), то и α такова.

Доказательство. Пусть $N \models \beta$. Не ограничивая общности, можно считать, что элементы из N, неразличимые предикатами, просто совпадают. При этом, например, в условиях посылки формулы (4) элементы x и y из N совпадают. При $N \models g_i a$ будем говорить, что a—элемент i-го сорта, при $B(a, b)$, a—предшественник b, b—последователь a. В силу формул (1)—(4) элемент нулевого сорта имеет единственного последователя и единственного предшественника в N, у элемента 2-го сорта все последователи последователей совпадают, а у элемента 1-го сорта все предшественники совпадают. Отсюда, как нетрудно видеть, вытекает, что, если у двух элементов нулевого сорта совпадают последователи, то у них совпадают и предшественники и наоборот. Отношение иметь общего последователя (или предшественника) разбивает все элементы нулевого сорта на классы эквивалентности. В каждом таком классе эквивалентности оставим по одному элементу, остальные выбросим. Получим непустую модель N'. Легко видеть, что $N' \models \beta$. Переходим к построению модели M:

$$|M| \rightleftarrows \{a \in |N'|: \ g_0 a\},$$

$$M \models Fab \rightleftarrows \begin{cases} N' \models Gab, & \text{если} \quad a \neq b, \\ N' \models f_0 a, & \text{если} \quad a = b, \end{cases}$$

$$M \models f_i a \rightleftarrows N' \models f_i a, \qquad \text{при} \quad i > 0.$$

Для каждого $a \in N'$ обозначим через a' последователя для a (у элементов 1-го сорта может быть несколько последователей, возьмем любой). При этом из $a \in |M|$ вытекает $a''' \in |M|$.

Фиксируем a, $b \in |M|$ и проверяем истинность $A(a, a''', b)$.

1. Случай $a \neq b$, $a''' \neq b$. При этом $f_i a''' \equiv f_i a'$ и $Fab \equiv Gab$, $Fba \equiv Gba$, $Fa'''b \equiv Ga'''b \equiv$ (см. (6)) $Gba'' \equiv$ (см. (5)) $Ga'b$. Таким образом, $A(a, a''', b)$ равносильно формуле $A'(a, a', b)$, которая истинна в силу (8).

2. Случай $a \neq b$, но $a''' = b$. Тогда $Fa'''b \equiv f^0 a''' \equiv f_0 a' \equiv$ (см. (7)) $Ga'a''' \equiv Ga'b$. Остальное, как в случае 1.

3. Случай $a = b$. При этом $f_i a''' \equiv f_i a'$ и $Fa'''a \equiv Ga'a$, $Fab \equiv Fba \equiv f_0 a$. Таким образом, $A(a, a''', b)$ равносильна формуле $A''(a, a', a)$, которая истинна в силу (9).

Итак, α истинна в M. Лемма 2 доказана. Из лемм 1 и 2 следует наша теорема.

Академия наук Грузинской ССР
Вычислительный центр

(Поступило 19.1.1973)

მათემატიკა

ი. გურევიჩი, ტ. ტურაშვილი

ი. შურანის ერთი შედეგის გაძლიერება

რეზიუმე

ვთქვათ α არის პირველი რიგის პრედიკატთა აღრიცხვის ჩაკეტილი

$$\forall x\, Gxx \,\&\, \forall x\, \exists y\, B(x, y) \,\&\, \forall xyz\, C(x, y, z)$$

ფორმულა, სადაც B და C უკვანტორო ფორმულებია და G არის ერთად-ერთი არაერთადგილიანი პრედიკატული ასო.

თ ე ო რ ე მ ა: ასეთ α ფორმულათა კლასი არის კონსერვატული დაყვანის კლასი.

აღნიშნული თეორემა წარმოადგენს [1] შედეგის (ორმხრივ) გაფართოებას.

MATHEMATICS

Yu. Sh. GUREVICH, T. V. TURASHVILI

THE STRENGTHENING OF ONE RESULT OF Ya. SURANYI

Summary

Let α be a closed formula of the kind

$$\forall x Gxx \& \forall x \exists y B(x, y) \& \forall xyz\, C(x, y, z)$$

of first order predicate logic, where formulae B and C are without quantifiers and G is a unique non-unary predicate letter in α.

Theorem. The class of all such α is a class of conservative reduction.

This theorem strengthens (in two directions) one result of [1].

ლიტერატურა — ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1. J. Suranyi. Period. Math. Hung., 1971, 1, № 2, 97—106.
2. Ю. Ш. Гуревич. Алгебра и логика, 5:2, 1966, 25—55.
3. В. Ф. Костырко. Кибернетика, № 1, 1966, 17—22.